Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

Beispielsammlung 7

Thema:

Binomialverteilung

Berücksichtigung dreier Rechner:

Grafikrechner:	CASIO fx 9860 CASIO fx CG 20
CAS-Rechner:	CASIO ClassPad II
Texas Instruments:	TI Nspire CAS

Datei 34021

Friedrich Buckel

Stand: 25. Januar 2019

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem mit den Lösungen besteht seit der Einführung der leistungsfähigen Rechner (Grafikrechner und CAS-Rechner), dass viel Schüler die Lösung gar nicht mehr berechnen sondern nur noch wissen müssen, wie man die Aufgabe seinem Rechner übergibt.
Daher werde ich beides zeigen und in der Neuauflage manch aufwendige „manuelle“ Lösung weglassen, weil sie kaum mehr jemand interessiert …

Die Aufgaben, deren Lösungen ausführliche Rechner-Anleitungen beinhalten, sind mit **Rechner** gekennzeichnet.

Inhalt

1 Kleinere Aufgaben zur Binomialverteilung

Die Aufgaben können mit Tabellen oder mit geeigneten Rechnern gelöst werden

Erklärung: Die Funktion $f_B(k;n;p)$ berechnet zur Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ und $F_B(k;n;p)$ die zugehörige Verteilungsfunktion zur Berechnung von $P(X \le k)$.

Aufgabe 7.01

Rechner

a) $f_B(3;12;0,5)$ $f_B(2;12;0,15)$ $f_B(4;12;0,65)$ $f_B(4;12;0,8)$

b) $F_B(2;12;0,15)$ $F_B(8;12;\frac{1}{3})$ $F_B(9;12;0,65)$ $F_B(5;12;\frac{2}{3})$

Aufgabe 7.02

Rechner

Es sei n = 12 und p = 0,45. Berechne:

a) $P(X \le 6)$ und $P(X < 9)$

b) $P(X \ge 3)$ und $P(X > 9)$

c) $P(1 \le X \le 6)$ und $P(3 \le X \le 8)$

Aufgabe 7.03

Es sei n = 12 und p = 0,75. Berechne:

a) $P(X \le 5)$ und $P(X < 11)$

b) $P(X \ge 7)$ und $P(X > 9)$

c) $P(5 \le X \le 9)$ und $P(3 < X < 7)$

Aufgabe 7.04

Es sei n = 100 und p = 0,45. Berechne:

a) $P(X = 55)$

b) $P(30 < X \le 40)$

c) $P(35 \le X < 51)$

Aufgabe 7.05

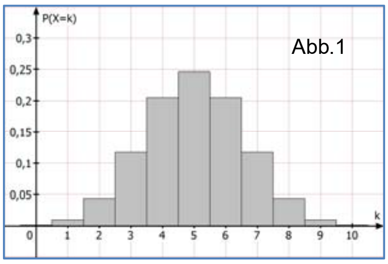
Schrauben werden mit 5% Wahrscheinlichkeit defekt produziert.
Berechne für n = 500 Schrauben den Erwartungswert für die defekten Schrauben sowie die Standardabweichung. Gib die $2\sigma-$ und $3\sigma-$Intervalle an und interpretiere sie.
Berechne die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten dazu und vergleiche.

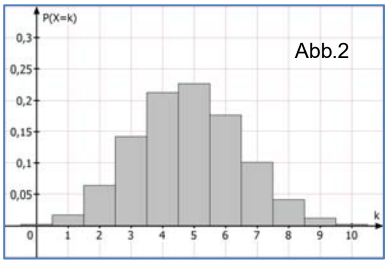
Aufgabe 7.06

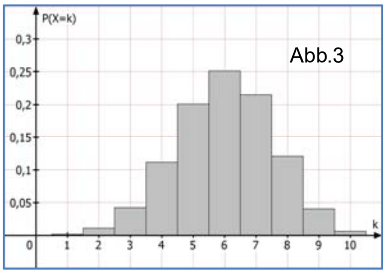
Die Zufallsgröße X ist binomial verteilt mit n = 10 und p = 0,6.

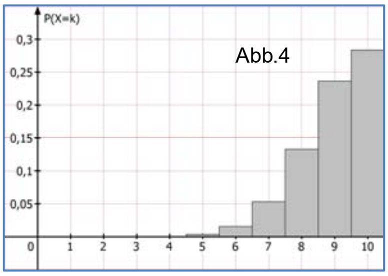
a) Welche der Histogramme zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.









b) Bestimmen Sie aus der korrekten Abbildung näherungsweise

$P(X \neq 5)$ und $P(X \geq 4)$

Aufgabe 7.10

Rechner

a) Bestimme die 90%-Umgebung von E mit $n = 150$ und $p = 0{,}28$.

b) Bestimme die 95%-Umgebung von E mit $n = 230$ und $p = 0{,}68$.

c) Bestimme die 85%-Umgebung von E mit $n = 175$ und $p = 0{,}35$.

Aufgabe 7.11

Rechner

a) Bestimme $P(64 \leq X \leq 84)$ für $n = 200$ und $p = 0{,}37$.

b) Bestimme $P(60 \leq X \leq 84)$ für $n = 180$ und $p = 0{,}4$.

c) Bestimme $P(60 \leq X \leq 76)$ für $n = 400$ und $p = 0{,}17$.

Aufgabe 7.12

Rechner

Bestimme $P(X < 90)$ und $P(X > 120)$ für $n = 300$ und $p = 0{,}36$.

Aufgabe 7.13

Rechner

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die unsymmetrische Umgebung $60 \leq X \leq 95$ für $n = 250$ und $p = 0{,}3$.

Aufgabe 7.21 Grundaufgaben

a) Warum kann man bei den folgenden Experimenten mit der Binomialverteilung rechnen?

b) Mit einem idealen Würfel wird 10-mal gewürfelt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei 4-mal eine Sechs?

c) Eine ideale Münze wird 100-mal geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei genau 50-mal „Zahl“.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man „Wappen“ nur 40-mal.

Aufgabe 7.22 Produktion defekter Geräte

Eine Maschine ist defekt und produziert mit der Wahrscheinlichkeit p=0,8 defekte Geräte.
Der laufenden Produktion werden 20 Geräte entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man darunter

a) Genau drei gute Geräte
b) höchstens ein gutes Gerät
c) genau 15 defekte
d) mindestens 17 defekte

Aufgabe 7.23 Karten ziehen

Auf dem Tisch liegen 32 Skatkarten ((je 8 Karten von den „Farben“ Kreuz, Pik, Herz und Karo).
Klaus darf sich 10-mal eine Karte ziehen, muss sie aber sofort zurücklegen, worauf neu gemischt wird.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dabei 5-mal Kreuz gezogen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dabei 8-mal Kreuz oder Pik (also schwarz) gezogen?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er nur rote Karten (Herz oder Karo)?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er gleich viele Herz- bzw. Pik-Karten?

Aufgabe 7.24 Schraubenproduktion

Eine Maschine stellt Schrauben her und produziert dabei mit 10 % relativer Häufigkeit fehlerhafte Schrauben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter fünfzig überprüften Schrauben

A: höchstens 2
B: weniger als 5
C: mehr als 5 aber höchstens 8
D: mehr als 3
E: mindestens 7

defekte findet?

Mit wie vielen defekten Schrauben muss er bei 100 geprüften rechnen?

Aufgabe 7.25 Linkshänder

Rechner

30 % der Personen in Schieldorf sind Linkshänder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man dort unter 10 Testpersonen

a) genau 3 Linkshänder

b) mindestens 2 Linkshänder

c) 3 bis 5 Linkshänder

Aufgabe 7.26 Sehr ausführliche Einstiegsaufgabe

Rechner

Transistoren werden mit einer Fehlerquote von 5 % hergestellt.
In einer Lieferung befinden sich 30 Transistoren. Der Empfänger testet 7 davon.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er genau 2 defekte Transistoren?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er höchstens 1 defekten Transistor?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er mindestens 1 defekten Transistor?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er 2 oder 3 defekte Transistoren?

e) Mit wie vielen defekten Transistoren muss er in einer Lieferung rechnen?

Aufgabe 7.27 Personensuche

Rechner

In Kuhdorf wohnen 80 männliche und 95 weibliche Personen. 40 % der Personen sind evangelisch. Am Freitag, den 13. überqueren 12 Personen gleichzeitig den einzigen Fußgängerüberweg.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 5 von ihnen evangelisch?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es dabei geregnet?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies gerade um 12.10 Uhr?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trug einer der Passanten einen Hut?

Aufgabe 7.28 Maus im Labyrinth

Eine Labormaus muss sich durch einen Irrgarten, den sie noch nicht kennt, einen Weg suchen.
Sie muss sich an 8 Stellen entscheiden, ob sie nach links oder rechts abbiegt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft sie

a) genau 4-mal rechts?

b) genau 5-mal in die gleiche Richtung?

c) mindestens 6-mal links?

d) höchstens 3-mal nach links und höchstens 6-mal nach rechts?

Aufgabe 7.29 Würfeln

Mit einem idealen Würfel wird 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man

a) mehr als 7, aber höchstens 12 Sechsen?

b) mindestens 30 und höchstens 40 gerade Zahlen?

c) zwischen 63 und 69 Zahlen unter 5?

Aufgabe 7.30 Würfeln

a) Mit einem idealen Würfel wird 10-mal gewürfelt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Man erhält genau 2 Einsen.

B: Man würfelt mindestens drei gerade Zahlen.

C_1: Die Augensumme ist 11

C_2: Die Augensumme ist 12

D: Man würfelt 2 Einsen, 4 Dreier und 4-mal die 5.

b) E: Man würfelt 6-mal und erhält 6 verschiedene Zahlen.

c) Nun wird zweimal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

F: Die erste Zahl ist gerade

G: Die zweite Zahl ist kleiner als 3.

H: Es tritt F oder G ein.

Aufgabe 7.31 Kugeln ziehen

In einem Karton liegen 8 weiße und 3 schwarze Kugeln, die blind nicht unterscheidbar sind. .

Nicole zieht 3 Kugeln mit Zurücklegen und Kerstin zwei.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Nicole mehr weiße Kugeln als Kerstin?

Aufgabe 7.32 Münzspiel

Holger wirft drei ideale Münzen. Elke zwei.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft Holger mehr Wappen als Elke?

Aufgabe 7.33 Fußball

Die Fußballmannschaft A gewinnt gegen B erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und verliert mit der Wahrscheinlichkeit 0,3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) gibt es ein Unentschieden?

b) gewinnt A fünfmal nacheinander?

c) schneidet B bei 4 Spielen insgesamt besser ab als A?

d) enden mindestens 2 von 3 Spielen unentschieden?

Aufgabe 7.34 Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test stehen jeder Frage 3 Antworten zum Ankreuzen gegenüber, von denen genau 1 richtig ist. Es darf auch nur eine Antwort angekreuzt werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim bloßen Raten mehr als die Hälfte der 4 Fragen beantwortet?

b) Wie lautet die Antwort, wenn er bei den ersten zwei Fragen jeweils eine falsche Antwort ausschließen kann?

Aufgabe 7.35 Dreifach-Kontrolle

Bei einer Produktion wird jeder Artikel dreimal unabhängig voneinander auf Qualität geprüft. Dies macht man, weil bei einer Prüfung ein Fehler nur mit 90% Wahrscheinlichkeit gefunden wird.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fehler bei diesen 3 Tests entdeckt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden bei diesem Testverfahren von 10 defekten Artikeln mindestens 8 bzw. alle 10 entdeckt?

Aufgabe 7.36 Schweinezucht

In einem Bauernhof wird Schweinezucht betrieben. Diese Tiere werden zu jeweils 6 Tieren in sogenannten Koben gehalten. Der Bauer besitzt 10 Koben. Es besteht nun der Verdacht, dass im Stall eine Krankheit ausgebrochen ist. Diese Krankheit wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,06 angenommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Koben mindestens ein Tier erkrankt ist

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Koben frei von dieser Krankheit bzw. alle Koben infiziert?

c) Diese Berechnung macht wirtschaftlichen Sinn: Es ist preiswerter, das Blut aller Tiere eines Kobens zu mischen und dann eine Blutuntersuchung dieses Kobens zu machen, als von vorne herein jedes Tier zu untersuchen. Erst wenn in einem Koben ein Befund festgestellt worden ist, kann man jedes Tier einzeln testen.
Stelle dazu Berechnungen über anfallende Kosten an.

2 Größere Aufgaben

Aufgabe 7.50 Wieder mal die Urne

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln mit den Nummern 1, 2, 2, 2, 3, 3.

a) Zuerst werden 10 Kugeln zufällig der Reihe nach entnommen und sofort wieder zurückgelegt. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Man erhält genau zweimal die Kugel 1.

B: Es werden 3 Zweier, 5 Dreier und zwei Einser gezogen.

C: Man erhält höchstens 7 Zweier.

D: Die ersten drei Kugeln tragen verschiedene Zahlen, dann folgen nur noch Zweier.

E: Es werden genau 4 Kugeln mit der Zahl 2 gezogen, und diese erhält man auch noch nacheinander.

b) Wie große ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei Entnehmen mit Zurücklegen von 4 Kugeln die Summe 6 erhält?

c) Heidi entnimmt zwei Kugeln mit einem Griff. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben die Zahlen die Summe 4?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim Entnehmen von 20-mal zwei Kugeln mit einem Griff genau viermal die Summe 4?

Mit wie vielen „Treffern“ (= Augensumme 4) kann man mit 20 Entnahmen rechnen?

Aufgabe 7.51 Bunte Glaskugeln

In einer Packung Glaskugeln befinden sich stets 20 Kugeln, darunter sollen laut Hersteller im Schnitt 5 blaue Kugeln sein. Der Händler überprüft dies, öffnet dazu eine Schachtel und zählt die blauen Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er in einer Packung

a) genau 7 blaue Kugeln?

b) weniger als 5 blaue Kugeln?

Eine Packung mit 7 blauen Kugeln heißt Edelpackung.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man

c) unter 10 Packungen sogar 3 Edelpackungen?

d) unter 50 Packungen mindestens 10 Edelpackungen?

e) unter 25 Packungen 5 bis 7 Edelpackungen?

Aufgabe 7.52 Annahme-Wahrscheinlichkeit

Ein Händler erhält von einem neuen Lieferanten eine Sendung mit 1000 Glühbirnen. Dessen Angabe lautet: Eine Glühlampe ist zu 95% Wahrscheinlichkeit gut. Der Händler beschließt folgendes **Testverfahren**: Zunächst prüft er 25 Glühlampen. Sind darunter höchstens 2 defekte, nimmt er die Sendung an. Findet er mehr als 5 defekte, schickt er sie zurück. Bei 3 bis 5 defekten will er einen ungünstigen Zufall ausschließen und testet weitere 50 Glühbirnen. Sind darunter höchstens 3 defekte, dann nimmt er die Sendung an, in jedem anderen Fall wird sie zurückgeschickt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Sendung an?
Zeichne zuerst ein Annahme-Diagramm in Form eines Baumdiagramms.

Aufgabe 7.53 Defekte Transistoren

Rechner

Transistoren einer Baureihe sind mit 6,5 % defekt, wobei sie die Fehler

A: Die Spannungsfestigkeit ist nicht garantiert,

B: Die Stromverstärkung liegt außerhalb der Toleranzgrenze haben können.

Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Schon ein Fehler macht den Transistor unbrauchbar. Der Fehler A tritt mit einer absoluten Häufigkeit von 4 % auf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt B auf, und mit welcher beide zusammen?

b) Wie viele defekte Transistoren kann man in einer Packung von 20 Stück erwarten?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 2 defekte in einer Packung?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt dies (dass pro Packung höchstens 2 defekte Transistoren enthalten sind) für alle 12 Packungen einer Lieferung?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten höchstens 10 Packungen dieser Lieferung nicht mehr als 2 defekte Transistoren?

c) Ein Händler testet eine Sendung und wählt dazu eine Packung zufällig aus. Findet er darin höchstens einen defekten Transistor, nimmt er die Sendung an, sonst testet er eine zweite Packung. Findet er darin höchstens 2 defekte, nimmt er die ganze Sendung an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Sendung an?

Aufgabe 7.54 Auch Kondensatoren sind anfällig

Kondensatoren einer Produktion sind zu 35 % 2. Wahl und zu 5 % defekt.

a) Einer Packung werden 20 entnommen und geprüft. Berechne die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

A: Alle 20 sind 1. Wahl

B: Genau 3 sind 2. Wahl

C: Mindestens 3 sind defekt

D: Nur die ersten 3 sind 2. Wahl

E: Nacheinander werden 15 Kondensatoren 1. Wahl entnommen.
Der Rest ist keine 1. Wahl.

F: Die beiden ersten sind defekt, die letzten 5 sind 2. Wahl, der Rest ist 1. Wahl.

b) In einem Karton sind 50 Kondensatoren dieser Produktion.
Mit wie vielen Kondensatoren 1. bzw. 2. Wahl kann man rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Kondensatoren 1. Wahl vom Erwartungswert um höchstens 2 ab?

c) Ein Karton heißt ***brauchbar***, wenn er höchstens einen defekten Kondensator enthält.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Karton mit 50 Kondensatoren brauchbar?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 10 Kartons höchstens 2 unbrauchbare findet?

d) Ein Händler testet einen Karton mit 50 Kondensatoren. Er will damit testen, ob er die Lieferung annimmt. Findet er unter 20 Kondensatoren höchstens einen defekten, nimmt er die Lieferung an. Bei mehr als drei defekten lehnt er sie ab. Bei 2 oder 3 defekten testet er weitere 20 Kondensatoren. Ist darunter dann höchstens 1 defekter, dann nimmt er die Sendung an. Berechne die Annahme-Wahrscheinlichkeit.

e) Diese Kondensatoren können die Fehler F_1 oder F_2 haben. Ein Kondensator mit genau einem dieser Fehler heißt 2. Wahl, treten beide auf, liegt Ausschussware vor (defekt).
Zeichne ein Baumdiagramm zur Veranschaulichung dieses Vorgehens.
Berechne $p_1 = P(F_1)$ und $p_2 = P(F_2)$ unter der Annahme, dass die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind!

Aufgabe 7.55 Glücksrad

Ein Glücksrad hat 8 gleich große Sektoren, von denen einer rot, drei weiß und vier blau gefärbt sind. Nach dem Drehen des Rades, zeigt ein Pfeil immer auf genau ein Feld.

a) Das Rad wird viermal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X = Anzahl der weißen Felder (als Ergebnis nach vier Drehungen). Zeichne ein Histogramm.

b) Das Rad wird siebenmal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Blau erscheint höchstens fünfmal.
B: Die ersten drei Felder sind blau, dann folgt zweimal rot und zweimal weiß.
C: Es erscheint abwechselnd weiß und nicht weiß.
D: Bei den ersten drei Drehungen erhält man kein rot, unter den restlichen kommt rot genau zweimal vor.
E: Man erhält genau 3 blaue Felder, 3 weiße und 1 rotes.
F: Unter den ersten drei Feldern kommt jede Farbe genau einmal vor.

c) Wie oft muss man das rad mindestens drehen, um mit mindestens 97 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Farbe Rot zu bekommen?

d) Fünf Sektoren des Glücksrades werden mit der Zahl 1 beschriftet, die restlichen mit der Zahl 2. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse (wobei wir davon ausgehen, dass die Ereignisse – trägt Farbe bzw. trägt Zahl stochastisch unabhängig sind):
G: Bei einer Drehung erhält man ein blaues Feld mit der Zahl 1.
H: Bei einer Drehung erhält man ein Feld, das weiß ist oder die 2 trägt.
I: Bei einer Drehung erhält man einen Sektor, der weder weiß ist, noch die Zahl 1 zeigt.

e) Kuno und Melisande führen mit diesem Rad ein Spiel durch. Sie drehen das Rad abwechselnd, wobei Melisande beginnen darf.
Die Spielregel lautet: Melisande gewinnt, wenn sie ein weißes Feld erhält, Kuno gewinnt mit blau. Es werden maximal drei Runden gespielt, hat einer vorher gewonnen, endet das Spiel.
Berechne die Gewinnchancen für beide.
Wie ändern sich die Gewinnchancen bei beliebig vielen Spielrunden?

Aufgabe 7.56

Eine Urne enthält 2 rote, 3 weiße und 5 schwarze Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln **mit einem Griff** entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X = Zahl der weißen Kugeln. Stelle sie als Histogramm dar.

b) Nun werden 6 Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse:

A: Es werden nur schwarze Kugeln gezogen

B: Es wird genau eine weiße Kugel gezogen

C: Es werden genau 3 rote Kugeln gezogen

D: Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen

E: Es werden höchstens 4 schwarze Kugeln gezogen

F: Man zieht abwechseln schwarz und weiß

G: Nur die ersten zwei Kugeln sind schwarz, dann folgt noch genau eine rote Kugel.

H: Von jeder Farbe werden genau 2 Kugeln gezogen.

I: Es werden gleich viele rote und weiße Kugeln gezogen.

c) Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen?

d) Uli und Mertel ziehen abwechselnd eine Kugel und legen sie dann wieder zurück. Uli beginnt. Wer rot zieht, hat gewonnen, dann endet dieses 1. Spiel, das über maximal 4 Runden geht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Uli bzw. Merten?
Wie lautet dieses Ergebnis bei beliebig langem Spiel?

Ein 2. Spiel verläuft so, dass die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird. Es endet auf natürliche Weise. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Uli bzw. Merten jetzt?

e) 4 beliebige dieser 10 Kugeln tragen den Buchstaben A (stochastisch unabhängig) von ihren Farben. Man entnimmt zufällig eine dieser Kugeln.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie

(1) schwarz und trägt ein A?

(2) weiß oder trägt ein A?

(3) rot und trägt kein A?

(4) weder rot noch trägt sie ein A?

(5) rot oder weiß und trägt ein A?

(6) weiß und trägt kein A oder sie ist nicht rot und trägt ein A?

Aufgabe 7.57 Schalter

Rechner

Bei der Produktion von Schaltern entsteht einer Firma 10% Schrott. Man prüft daher 20 Schalter.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

A: alle Schalter brauchbar?

B: mindestens 15 Schalter intakt?

C: Höchstens 2 Schalter defekt?

b) Mit wie vielen defekten Schaltern muss man unter 100 rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der defekten Schalter davon um höchstens 1 ab?
In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Stückbereich erhält man 60% bzw. 99% der defekten Schalter?

Aufgabe 7.58 Große“ 3-mal-mindestens-Aufgabe; Sigma-Umgebungen

Rechner

Eine Glühlampe ist zu 95% Wahrscheinlichkeit in Ordnung

a) Wie viele müsste man mindestens kaufen, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 15 gute Glühbirnen zu bekommen?

b) Bei einem Werkstest werden der Produktion 200 Glühlampen entnommen und geprüft.
Berechne die drei bekannten Sigma-Umgebungen und interpretiere die Ergebnisse.

Aufgabe 7.59 Telepathie

Rechner

1% der Bevölkerung scheint telepathische Fähigkeiten zu besitzen.

a) Wie viele Leute muss man zu einem Test einladen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einen dieser Begabten nachweisen zu können?

b) Wie viele sollten es sein, damit man mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens 3 solche findet? Zeige zuerst, dass die Anzahl zwischen 500 und 700 liegen muss. Schränke dann weiter ein.

Aufgabe 7.60 Dreier-Pasch

Rechner

Drei ideale Würfel werden geworfen. Als Treffer gilt ein Dreierpasch (also drei gleiche Augenzahlen). Es wird 144-mal geworfen.

a) Mit wie vielen Treffern kann man rechnen? Wie groß ist die Standardabweichung?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man mehr als nur einen Treffer?

c) Wie oft müsste man mindestens werfen, um mit 80% Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Treffer zu bekommen?

Aufgabe 7.61 Münze werfen

Rechner

Eine ideale Münze wird dreimal nacheinander geworfen. Die beiden Seiten der Münze seien W (Wappen) und Z (Zahl).

a) Gib den Ergebnisraum S des Experiments an.

b) X sei die „Anzahl von Z“ bei 64 Würfen.
Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
A: genau 32-mal Zahl?
B: höchstes 20-mal Zahl?
C: mindestens 10-mal Wappen?
D: zwischen 20 und 40-mal Zahl?

c) Jetzt wird genau 10-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit zu
E: Genau 5-mal nacheinander Zahl, sonst nur Wappen.
F: Abwechslungsweise Wappen und Zahl.
G: Zuerst genau drei Zahl und dann am Ende noch einmal.

d) Was sagen die 3 Sigma-Intervalle zu b) aus? Gib sie an.

Aufgabe 7.62 Glücksrad

Rechner

(1) Ein Glücksrad enthält zehn gleich große Sektoren, von denen 4 rot und 6 weiß gefärbt sind.
Es sei X die Anzahl der roten Sektoren, die man bei 20 Drehungen erhält und Y die Zahl der weißen Sektoren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man …
a) genau 13 rote Felder?
b) genau 12 weiße Felder?
c) höchstens 8 weiße Felder?
d) höchstens 17 weiße Felder?
e) mindestens 11 rote Felder?
f) mindestens 16 rote Felder?
g) zwischen 10 und 13 weiße Felder?
h) zwischen 10 und 13 rote Felder?
i) mehr als 7 aber höchstens 10 rote Felder?
j) mindestens 11 aber weniger als 16 weiße Felder?

(2) Berechne den Erwartungswert E(X) für die Zahl X der roten Felder.
Bestimme das zu E(X) symmetrische Intervall, in dem mit mindestens 80 % Wahrscheinlichkeit die Felder rot sind.

(3) Wie oft muss man mindestens drehen, um mit mindestens 40 % Wahrscheinlichkeit mindestens 8 rote Sektoren zu erhalten?

Aufgabe 7.63 Bunte Kugeln

Rechner

In einem Behälter liegen blaue, weiße und rote Kugeln, wobei der Anteil der blauen Kugeln 20 % beträgt, der der weißen 10 %.
Aus diesem Karton werden rein zufällig Kugeln mit Zurücklegen entnommen.

a) Es werden 15 Kugeln entnommen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit zu diesen Ereignissen:

A: Es werden nur blaue Kugeln entnommen.
B: Man erhält mindestens 5 weiße.
C: Es werden höchstens 10 rote gezogen.
D: Jede zweite Kugel ist rot.
E: Die 2. und 4. Kugel ist weiß, die letzten drei sind blau.

b) Wie viele Kugeln muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 50 % Wahrscheinlichkeit mindestens 2 weiße zu ziehen?

Wie viele rote Kugeln kann man unter 100 Kugeln erwarten?
Bestimme das kleinste dazu symmetrische Intervall, in dem die roten Kugeln mit mindestens 80 % vorkommen.

c) Spielzeugpackungen enthalten 100 Kugeln dieser Zusammensetzung.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als 75 rote Kugeln in dieser Packung?
Und mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 3 genau solcher Kartons unter 20 Kartons?

Aufgabe 7.64 Stadtkinder

Rechner

a) Zwei Drittel einer Jugendgruppe wohnt in der Stadt. Es werden zufällig Jugendliche ausgewählt.
Wie viele muss man mindestens auswählen, um mit mindestens 96 % Wahrscheinlichkeit **mindestens 9** Stadtkinder zu bekommen?

b) Mit wie vielen Stadtkindern kann man unter 300 Jugendlichen rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man diese Anzahl?
Berechne die Wahrscheinlichkeit zu diesen Ereignissen (es sei $n = 300$):
A: Man erhält höchstens 150 Stadtkinder.
B: Man erhält mehr als 200 Stadtkinder.
C: Man erhält mehr als 190 aber weniger als 210 Stadtkinder.
D: Man erhält mindestens 200 aber höchstens 250 Stadtkinder

c) Bestimme ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem zu 66% Stadtkinder sind.

d) Bestimme k so, dass gilt: $P(X \le k) = 0{,}82$.

Beschreibe dieses Ereignis mit Worten.

Lösungsteil

Lösung 7.01

a) $f_B(3;12;0,5) = 0,0537$ $\qquad$ $f_B(2;12;0,15) = 0,2924$

$f_B(4;12;0,65) = 0,0199$ $\qquad$ $f_B(4;12;0,8) = 0,0005$

Erklärungen zur Wertfindung:

Die Funktion $f_B(k;n;p)$ stellt die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** der Binomialverteilung dar.

Die Rechnung $f_B(3;12;0,5) = 0,0537$ bedeutet, dass man für eine Zufallsvariable X berechnet:

$$P(X=3) = f_B(3;12;0,5) = \binom{12}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0,5^{12} = 0,0537$$

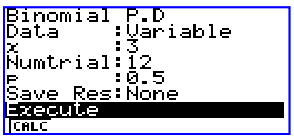
Allgemein gilt für diese Binomialverteilung(sfunktion): $\quad f_B(k;n;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

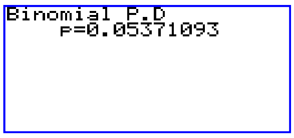
Dabei ist n der Umfang der Stichprobe und p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des gefragten Ergebnisses, das man 3-mal erhält bei 12 Experimentstufen.

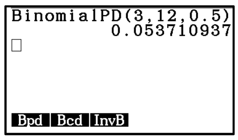
Das Symbol $\binom{12}{3}$ ist der Binomialkoeffizient, der angibt, auf wie viele Arten man 3 Plätze aus 12 auswählen kann, wobei die Reihenfolge der Auswahl nicht beachtet wird.

Man kann einzelne Werte aber auch in Tabellen nachschlagen (darauf gehe ich hier nicht ein) oder sie mit geeigneten Rechnern bestimmen (siehe Text 34011), was ich hier einmal demonstriere:

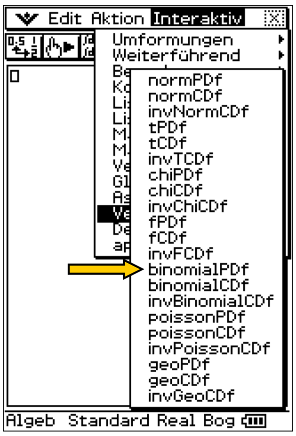
Mit dem Grafikrechner CASIO fx9860 $\qquad$ **bzw. CASIO fx CG20**

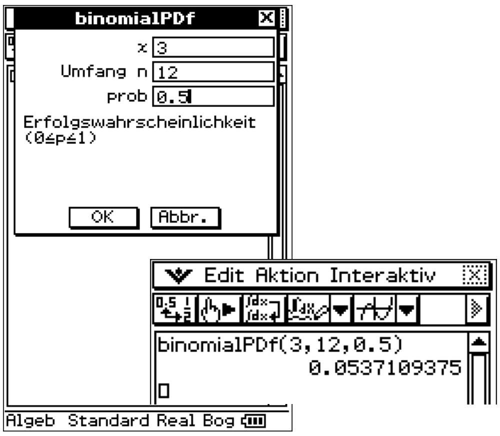




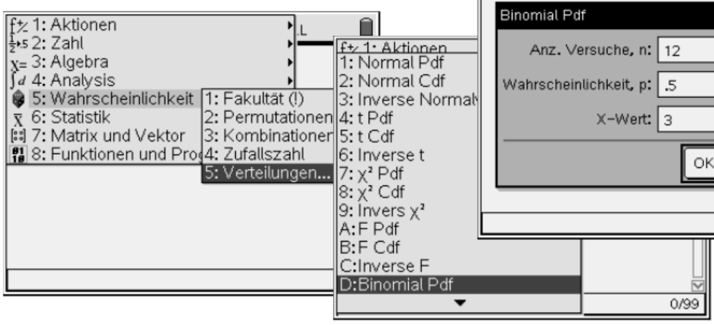


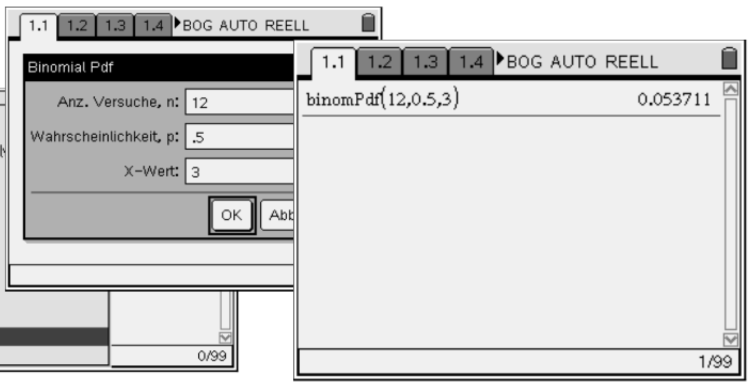
Mit dem CAS-Rechner CASIO ClassPad:





Mit dem CAS-Rechner TI Nspire CAS:





b) $F_B(2;12;0,15) = 0,7358$ $\qquad F_B(8;12;\frac{1}{3}) = 0,9961$

$F_B(9;12;0,65) = 1 - 0,1513 = 0,8387$ $\qquad F_B(5;12;\frac{2}{3}) = 1 - 0,9336 = 0,0664$

Erklärungen:

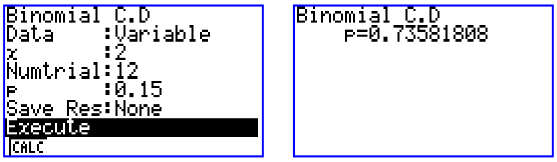
Die Funktion $F_B(k;n;p)$ stellt die **Verteilungsfunktion** der Binomialverteilung dar.

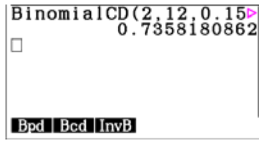
Sie summiert die Werte der Binomialverteilung von X = 0 bis X = k auf und berechnet daher diese Wahrscheinlichkeit: $P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=k) = P(X \le k) = F_B(k,n,p)$

a) gehört also zu einer Fragestellung wie: Wie oft kommen höchstens 2 (k=2) aus n = 12 Elementen vor, die mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,15 auftreten?

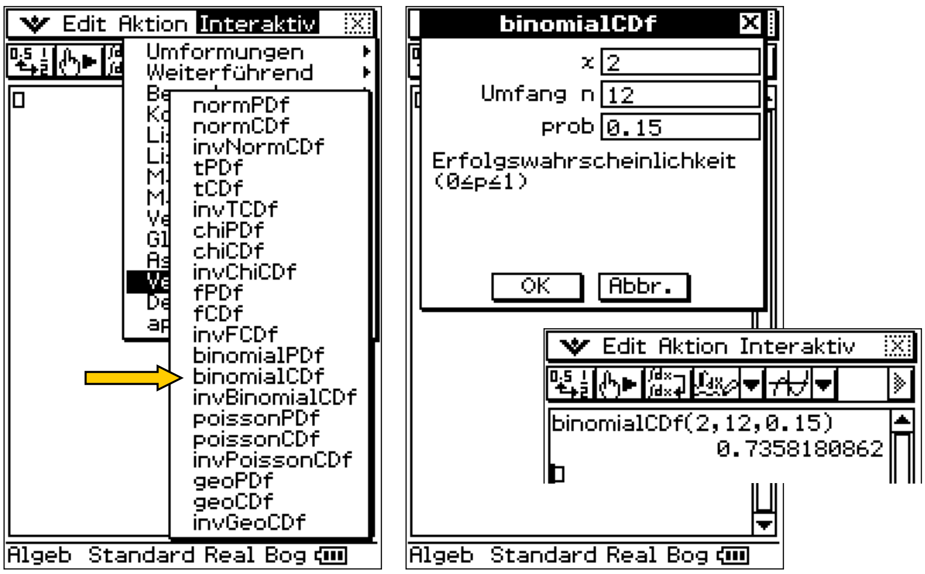
Das Ergebnis kann man oft aus Tabellen ablesen oder mit geeigneten Rechnern berechnen:

Mit dem Grafikrechner CASIO fx9860 **bzw. CASIO fx CG20**

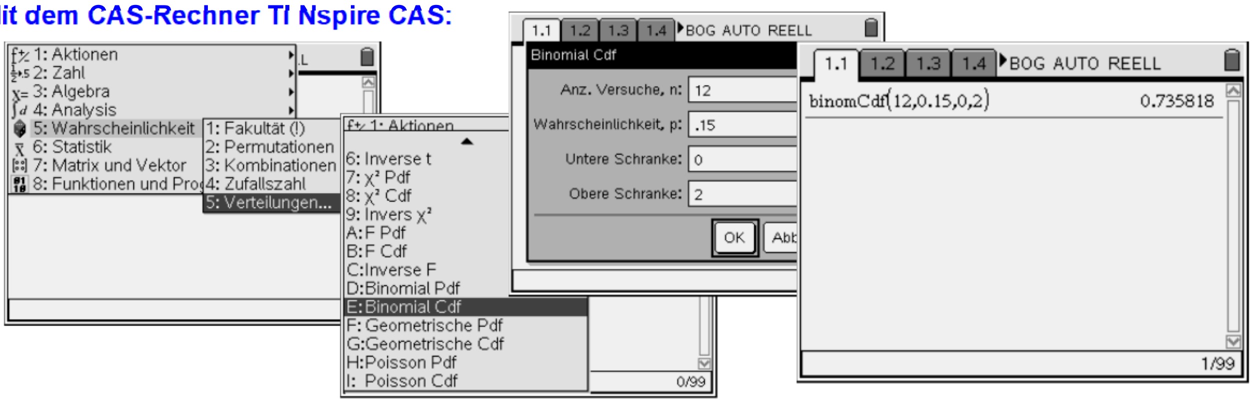




Mit dem CAS-Rechner CASIO ClassPad:



Mit dem CAS-Rechner TI Nspire CAS:



Lösung 7.02

a) $P(X \le 6) = F_B(6;12;0,45) = 0,7393$

$X \le 6$ ist eine „Höchstens-Aufgabe“: Berechnung mit der Verteilungsfunktion!

$P(X < 9) = P(X \le 8) = F_B(8;12;0,45) = 0,9644$

$X < 9$ wird ersetzt durch die “Höchstens-Aufgabe” $X \le 8$.

b) $P(X \ge 3) = 1 - F_B(2;12;0,45) = 0,9579$

Aus der „Mindestens-Aufgabe“ macht man über das Gegenereignis eine „Höchstens-Aufgabe“: Das Gegenteil von „mindestens 3“ ist nämlich „höchstens 2“.

$P(X > 9) = 1 - P(X \le 9)$

Aus der „Mehr-als-Aufgabe“ macht man über das Gegenereignis eine „Höchstens-Aufgabe“: Das Gegenteil von „mehr als 9“ ist nämlich „höchstens 9“.

c) $P(1 \le X \le 6) = F_B(6;12;0,45) - F_B(0;12;0,45) = 0,7393 - 0,0008 = 0,7385$

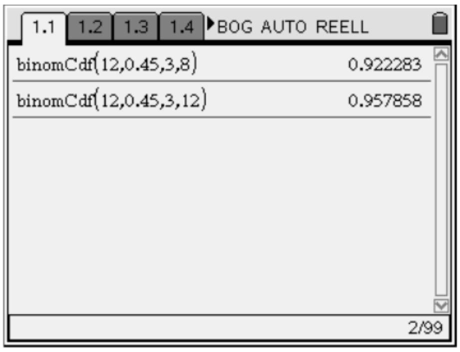
Diese „**Von 1 – bis 6 -Aufgabe**“ löst man auch mit der Verteilungsfunktion, indem man die Wahrscheinlichkeit von „Höchstens 6“ berechnet und davon die Wahrscheinlichkeit für X = 0 subtrahiert.

$P(3 \le X \le 8) = F_B(8;12;0,45) - F_B(2;12;0,45) = 0,9644 - 0,0421 = 0,9223$

Diese „**Von 3 – bis 8 -Aufgabe**“ löst man auch mit der Verteilungsfunktion, indem man die Wahrscheinlichkeit von „Höchstens 8“ berechnet und davon die Wahrscheinlichkeit für „Höchstens 2“ subtrahiert.

Man kann sie also genau so mit den Rechnern lösen wie zuvor gezeigt.
Einige Superrechner ermöglichen es, die „Von-bis-Aufgaben“ direkt zu berechnen, indem man die untere und die oberen Schranke eingibt und nicht mehr subtrahieren muss.
Damit kann man auch die „Mindestens-Aufgaben“ lösen!

Oben die Eingabe:
„Von 3 bis 8“

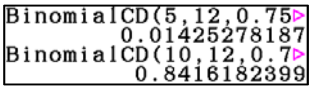


Hier die Eingabe zu
„Mindestens 3“
(also von 3 bis 12).

Lösung 7.03

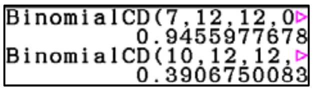
a) $P(X \le 5) = F_B(5;12;0,75) = 0,0143$

$P(X < 11) = F_B(10;12;0,75) = 0,8416$



b) $P(X \ge 7) = 1 - F_B(6;12;0,75) = 0,9456$

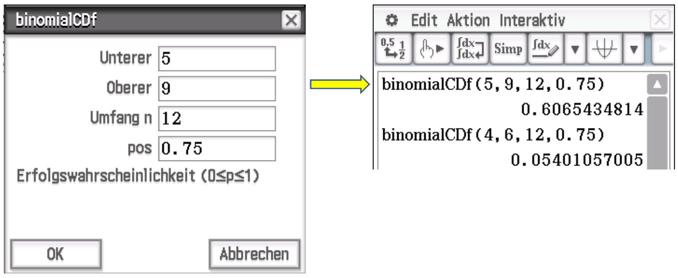
$P(X > 9) = 1 - F_B(9;12;0,75) = 0,3907$



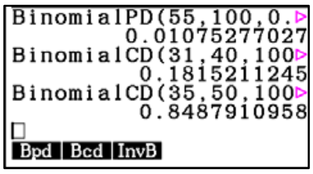
c) $P(5 \le X \le 9) = F_B(9;12;0,75) - F_B(4;12;0,75) = 0,6094 - 0,0028 = 0,6066$

$P(3 < X < 7) = F_B(6;12;0,75) - F_B(3;12;0,75) = 0,9996 - 0,9456 = 0,0540$

Oder bei direkter Berechnung ohne Subtraktion:



Aufgabe 7.04



a) $P(X = 55) = f_B(55;100;0,45) = 0,0175$

b) $P(30 < X \le 40) = F_B(40;100;0,45) - F_B(30;100;0,45) = 0,1831 - 0,0015 = 0,1816$

c) $P(35 \le X < 51) = F_B(50;100;0,45) - F_B(34;100;0,45) = 0,8654 - 0,0166 = 0,8488$

Aufgabe 7.05

Schrauben werden mit 5% Wahrscheinlichkeit defekt produziert.
Berechne für n = 500 Schrauben den Erwartungswert für die defekten Schrauben sowie die Standardabweichung. Gib die $2\sigma-$ und $3\sigma-$Intervalle an und interpretiere sie.
Berechne die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten dazu und vergleiche.

Erwartungswert bei Binomialverteilung : $E = n \cdot p = 500 \cdot 0,05 = 25$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95} \approx 5$

Das $2\sigma-$Intervall ist daher: $E - 2\sigma \le X \le E + 2\sigma \quad \Leftrightarrow \quad 20 \le X \le 30$

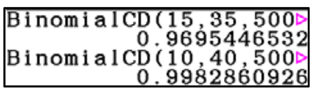
Laut Theorie liegen darin etwa $95,5\%$ aller X-Werte.

In diesem Beispiel erhält man $P(15 \le X \le 35) = 0,9696 \approx 97\%$

Das $3\sigma-$Intervall ist daher: $E - 3\sigma \le X \le E + 3\sigma \quad \Leftrightarrow \quad 10 \le X \le 40$

Laut Theorie liegen darin etwa $99,7\%$ aller X-Werte.

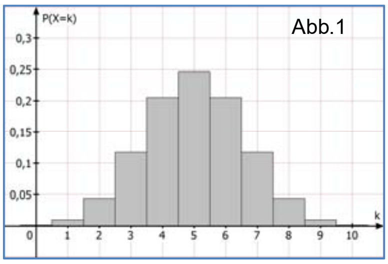
In diesem Beispiel erhält man $P(10 \le X \le 40) = 0,9983 \approx 99,8\%$

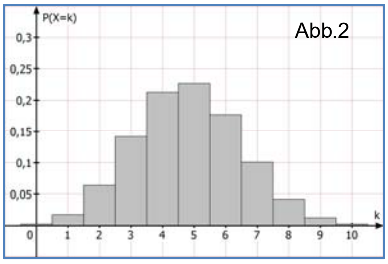


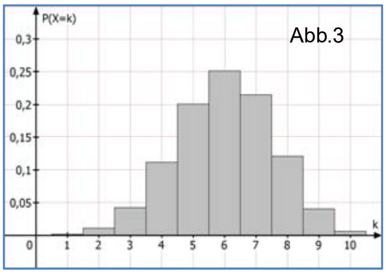
Lösung 7.06

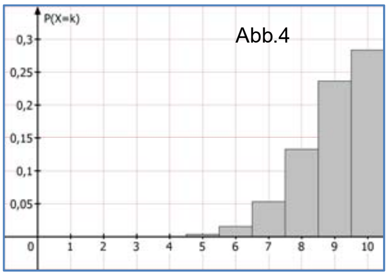
Die Zufallsgröße X ist binomial verteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) Welche der Histogramme zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X? Begründen Sie Ihre Entscheidung.









Für eine Binomialverteilung gilt für den Erwartungswert: $E = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}6 = 6$

Der Erwartungswert hat die größte Wahrscheinlichkeit. Also kann nur die Abb.3 richtig sein.

b) Bestimmen Sie aus der korrekten Abbildung näherungsweise $P(X \neq 5)$ und $P(X \geq 4)$

Aus Abb. 3 liest man ab:

$$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) \approx 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots + P(X = 10)$$

oder kürzer:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$$

$$P(X \geq 4) = 1 - 0 - 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}04 = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$$

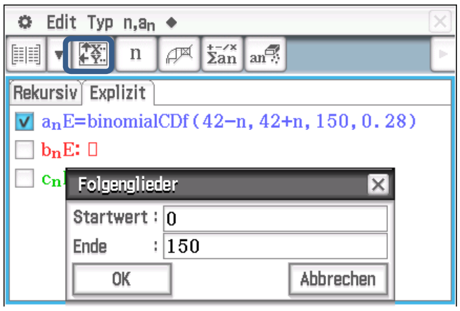
Lösung 7.07

a) Bestimme die 90%-Umgebung von E mit n = 150 und p = 0,28.

b) Bestimme die 95%-Umgebung von E mit n = 230 und p = 0,68.

c) Bestimme die 85%-Umgebung von E mit n = 175 und p = 0,35.

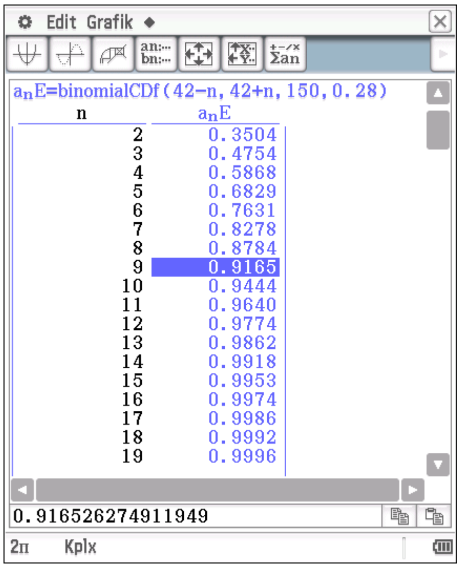
Lösung mit CASIO ClassPad II



Zuerst berechnet man den Erwartungswert:

$E(X) = np = 150 \cdot 0,28 = 42$

Dann erzeugt man über „Interaktiv“ den Binomialterm zu $P(42-n \le X \le 42+n)$. Den markiert und kopiert man.
Dann öffnet man das Folgen-Menü und fügt ihn in die explizite Folge $a_n E$ ein. Dann legt man den Definitionsbereich fest z.B. 0 bis 150 (30 bis 60 reicht hier auch, da kann man testen.)
Dann lässt man sich die Folgenglieder (Funktionswerte) anzeigen:



Man sucht den Wert von n, für den der Funktionswert, also P, etwa 90% = 0,9 ist. Das gelingt am besten mit n =9.

Ergebnis: Zu 90% liegen die X-Werte im Intervall

$42-9 \le X \le 42+9 \quad \Leftrightarrow \quad 33 \le X \le 51$

Oser so: $X \in \{33,34,...,51\}$

Eine andere Möglichkeit ist folgende:

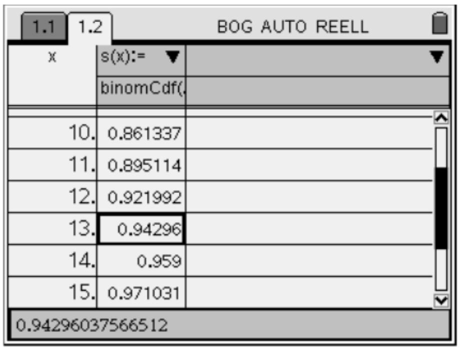
Man definiert eine Binomialfunktion $f(x) = \text{binomial}(42-x, 42+x, 150, 0.28)$ und lässt sich ihre Wertetabelle anzeigen. Dort findet man dann analog den Wert x = 9.

b) $E(X) = np = 230 \cdot 0,68 = 156,4$

Gesucht ist die 95%-Umgebung.
Der Wert 95% liegt jetzt zwischen x = 13 und x = 14. Man ist geneigt, sich hier für x = 12 zu entscheiden.
Dann folgt für X die Ungleichung

$156,4-12 \le X \le 156,4+12$ bzw. $144,4 \le X \le 168,4$

Wir erhalten somit den Bereich {145; 146; ... ; 168}.



c) $E(X) = np = 175 \cdot 0,35 = 61,25$ Gesucht ist die 85%-Umgebung.

Man liest ab: x = 9, Dies führt zur Ungleichung: $61,25-9 \le X \le 61,25+9$

bzw. $52,25 \le X \le 70,25$.

Wir erhalten somit für X den Bereich {52 ; 53 ; ... ; 70}.

Ergebnis: Mit 85% Wahrscheinlichkeit liegen die Werte in der Menge {52 ; 53 ; ... ; 70}.

Lösung 7.11

Bestimme $P(64 \leq X \leq 84)$ für $n = 200$ und $p = 0{,}37$.

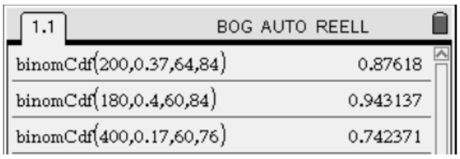
Für ältere bzw. ein fachere Rechner rechnet man:

$$P(64 \leq X \leq 84) = P(X \leq 84) - P(X \leq 63) = 0{,}8762$$

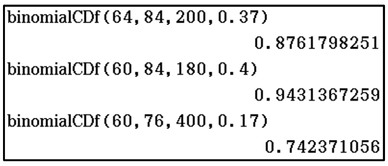
Die neuen Modelle können untere und obere Grenze gleich gemeinsam verarbeiten:

Achtung: Die Syntax kann bei anderen Rechnern auch anders sein,

Hier die Anzeige bei TI Nspire CAS:



Hier von CASIO ClassPad



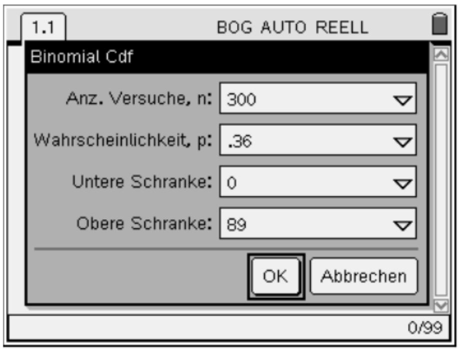
Lösung Aufgabe 7.12

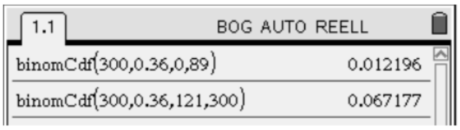
Bestimme $P(X < 90)$ und $P(X > 120)$ für $n = 300$ und $p = 0{,}36$.

(1) Lösung mit TI Nspire

Zuerst die Eingabe für $P(X < 90) = P(X \leq 89)$.

Dann beide Ergebnisse:

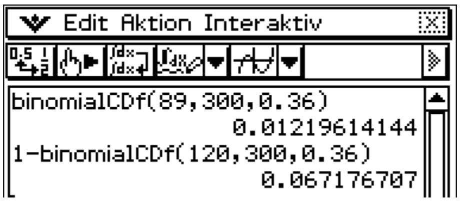




Die Aufgabe $P(X > 120)$ löst man entweder so:

$P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120)$ oder $P(X > 120) = P(121 \leq X \leq 300)$

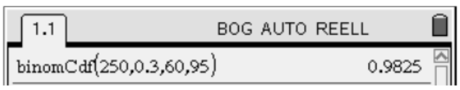
(2) Lösung mit CASIO ClassPad



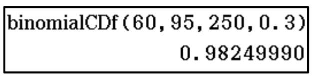
Aufgabe 7.13

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die unsymmetrische Umgebung $60 \leq X \leq 95$ für $n = 250$ und $p = 0{,}3$.

(1) Lösung mit TI Nspire



(2) Lösung mit CASIO ClassPad



Lösung 7.21 Grundaufgaben

a) Warum kann man bei den folgenden Experimenten mit der Binomialverteilung rechnen?

b) Mit einem idealen Würfel wird 10-mal gewürfelt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei 4-mal eine Sechs?

c) Eine ideale Münze wird 100-mal geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei genau 50-mal „Zahl“.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man „Wappen“ nur 40-mal.

Eine **Binomialverteilung** liegt vor, weil es ein mehrstufiges Experiment mit jeweils 2 Ausgängen mit konstant bleibender Wahrscheinlichkeit ist.

a) $P(X=4)=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=210\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}0543$

Zur Erklärung:

Das Würfelergebnis kann man sich als Pfad mit 10 Plätzen vorstellen.
Je nach Zufall verteilen sich bei diesem Ereignis die 4 Sechsen auf diesen 10 Plätzen.
Als Grund-Wahrscheinlichkeiten treten $p_6=\frac{1}{6}$ und für keine Sechs $p_{\bar{6}}=\frac{5}{6}$ auf.

Daher hat jeder Pfad dieses Ereignisses die Wahrscheinlichkeit: $\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6$

Berechnung der Anzahl der möglichen Ergebnisse (= Pfade):

Man kann auf $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}=\frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=210$ Arten 4 Plätze aus 10 auswählen (und darauf eine $\boxed{6}$ schreiben), und genauso viele Pfade gibt es.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, genau 4-mal eine Sechs zu würfeln beträgt damit

$P(X=4)=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=210\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}0543$ (Taschenrechner)

b) Eine ideale Münze wird 100-mal geworfen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man dabei genau 50-mal „Zahl“.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man „Wappen“ nur 40-mal.

Lösung:

Hier liegt eine Binomialverteilung vor, denn das Experiment besteht aus 100 Stufen, denn die Wahrscheinlichkeit für Zahl und Wappen sind bei einer idealen Münze konstant 0,5.

Einführung einer Zufallsvariablen: Z sei die Anzahl „Zahl“ und W die Anzahl „Wappen“.

Grundsätzlich gilt hier : $P(Z=50)=\boxed{\text{Anzahl der Pfade}}\cdot\underbrace{0{,}5^{50}}_{\substack{\text{50-mal}\\ \text{Zahl}}}\cdot\underbrace{0{,}5^{50}}_{\substack{\text{50-mak}\\ \text{Wappen}}}$

Die Anzahl der Pfade ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, 50 Plätze für Z aus 100 auszulosen. Diese Anzahl liefert der Binomialkoeffizient:

$$P(Z=50)=\binom{100}{50}\cdot 0{,}5^{50}\cdot 0{,}5^{50}=\binom{100}{50}\cdot 0{,}5^{100}\approx 0{,}08$$

„Nur 40-mal W“ heißt $W=40$.

$$P(W=40)=\binom{100}{40}\cdot 0{,}5^{40}\cdot 0{,}5^{60}=\binom{100}{40}\cdot 0{,}5^{100}=0{,}0108$$

Lösung 7.22 Produktion defekter Geräte

Eine Maschine ist defekt und produziert mit der Wahrscheinlichkeit p=0,8 defekte Geräte.
Der laufenden Produktion werden 20 Geräte entnommen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man darunter

a) Genau drei gute Geräte
b) höchstens ein gutes Gerät
c) genau 15 defekte
d) mindestens 17 defekte

Es liegt eine 20-stufige Bernoulli-Kette vor, da die Wahrscheinlichkeit für „defekt" mit 0,8 als konstant angenommen werden kann.

X sei die Zufallsvariable "Zahl der guten Geräte" und Y = "Zahl der defekten Geräte".
X und Y ***sind binomial verteilt*** mit p_X = 0,2 und $p_>$ = 0,8.

Für einen einfachen Taschenrechner sollte man die Lösung ausführlich aufschreiben:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man darunter genau 3 gute Geräte?

$$P(X=3)=\binom{20}{3}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^{17}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^{17}=0,2054$$

b) höchstens 1 gutes Gerät?

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0,8^{20}+20\cdot 0,2\cdot 0,8^{19}\approx 0,0692$$

c) genau 15 defekte?

$$P(Y=15)=\binom{20}{15}\cdot 0,8^{15}\cdot 0,2^5=\frac{20!}{15!\cdot 5!}0,8^{15}\cdot 0,2^5\approx 0,1746$$

d) mindestens 17 defekte Geräte?

3 Berechnungsmöglichkeiten:

$$P(Y\ge 17)=P(Y=17)+P(Y=18)+P(Y=19)+P(Y=20)$$

$$=\binom{20}{17}\cdot 0,8^{17}\cdot 0,2^3+\binom{20}{18}\cdot 0,8^{18}\cdot 0,2^2+\binom{20}{19}\cdot 0,8^{19}\cdot 0,2+0,8^{20}$$

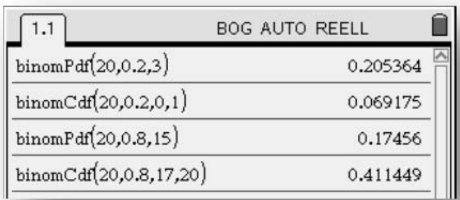
$$=0,2054+0,1369+0,0576+0,0115=0,4114$$

Oder so: $P(Y\ge 17)=1-P(Y\le 16)$ (Siehe CASIO)

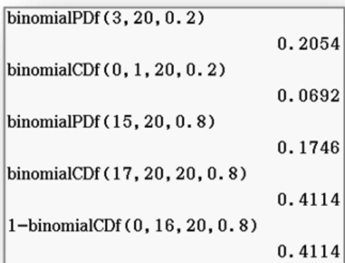
bzw. =BinomialCDf(17,20,20,0.8) (Siehe Nspire bzw. CASIO)

Falls der Rechner nur 0 als untere Grenze verarbeiten kann.

Z. B. TI Nspire:



CASIO ClassPad



Lösung 7.23 Karten ziehen

Auf dem Tisch liegen 32 Skatkarten ((je 8 Karten von den „Farben" Kreuz, Pik, Herz und Karo). Klaus darf sich 10-mal eine Karte ziehen, muss sie aber sofort zurücklegen, worauf neu gemischt wird.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dabei 5-mal Kreuz gezogen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dabei 8-mal Kreuz oder Pik (also schwarz) gezogen?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er nur rote Karten (Herz oder Karo)?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er gleich viele Herz- bzw. Pik-Karten?

(1) $p_{Kreuz} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $p_{\overline{Kreuz}} = \frac{3}{4}$ n = 10, k = 5:

K = Anzahl der Kreuz-Karten:

$P(K=5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0{,}0584$

(2) $p_{schwarz} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ n = 10, k = 8

S = Anzahl der schwarzen Karten:8

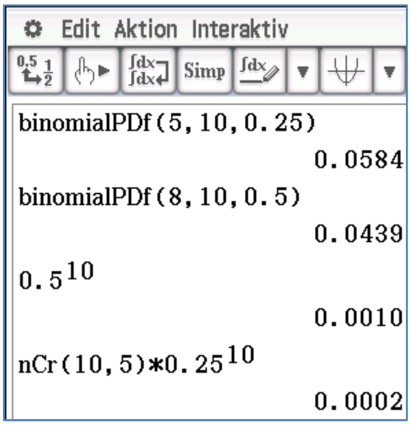
$P(S=8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}0439$

(3) Nur rote Karten: p = 0.5

R = Anzahl der roten Karten:

$P(R=10) = 0{,}5^{10} \approx 0{,}0010$

Berechnung mit CASIO ClassPad:



(4) $p_{Herz} = \frac{1}{4}$, $p_{Pik} = \frac{1}{4}$

$P(5\,H \text{ und } 5\,P) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0{,}0002$

Hinweis: Diese Lösung kann man nicht mit der Binomialverteilung berechnen, denn dazu muss die zweite Eigenschaft das Gegenteil zur ersten sein, also Nicht-Herz anstatt Pik. Und dann wäre die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten 1.

Lösung 7.24 Schraubenproduktion

Eine Maschine stellt Schrauben her und produziert dabei mit 10 % relativer Häufigkeit fehlerhafte Schrauben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter fünfzig überprüften Schrauben

- A: höchstens 2
- B: weniger als 5
- C: mehr als 5 aber höchstens 8
- D: mehr als 3
- E: mindestens 7

defekte findet?

Mit wieviel defekten Schrauben muss er bei 100 geprüften rechnen?

Zuerst MUSS man eine Zufallsvariable definieren und dazu diesen Pflichttext schreiben:

Es sei X die Anzahl der defekten Schrauben unter 50 ausgewählten.

X ist binomial verteilt *mit $p_{def} = 0{,}1$* (10% sind defekt).

Definitionsbereich für X: $D = \{0\,;1;...;49\,;50\}$.

Wissen: *Der Hinweis* ***„binomial verteilt“*** *bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeiten für X mittels der Binomialverteilung berechnet.*

Jedes der fünf genannten Ereignisse lässt sich durch eine Ungleichung beschreiben.

Ereignis A: Man findet höchstens 2 defekte Schrauben: $X \le 2$:

Zugehörige Ereignismenge: $A = \{0\,;1;2\}$

Wahrscheinlichkeit: $P(A) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

Für solche Summen enthalten die modernen Rechner die binomiale **Verteilungsfunktion**.

Diese heißt **binomialCDf** (bei CASIO) oder **binomCdf** (bei TI Nspire).

Achtung: Neue und alte Rechnerversionen unterscheiden sich hier.

Bei der Berechnung von Intervall-Wahrscheinlichkeiten wie $P(X \le 2)$ oder $P(X > 5)$ oder $P(2 \le X \le 5)$ muss man bei den neuen Versionen stets den linken und den rechten Rand eingeben.

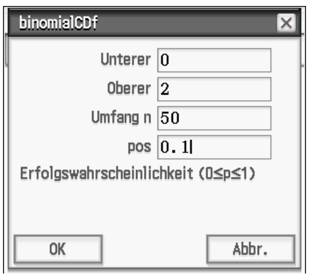
Alte Rechnerversionen verwenden oft als linken Rand nur die Zahl 0. Diese können also nur $P(0 \le X \le k)$ berechnen. Für andere Intervalle muss man mit einem Trick arbeiten.

Ich beziehe mich jetzt nur noch auf die neuen Versionen. Ich zeige jedoch auf Seite 26, wie man sich mit einem alten Gerät behelfen kann.

Lösung mit CASIO ClassPad II:

Menü: Interaktiv – Verteilungen – (diskret) – binomialCDf

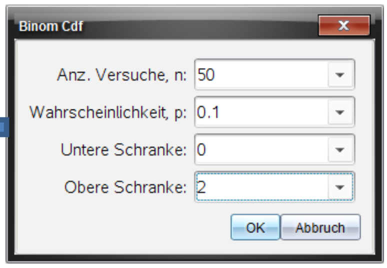
```
binomialCDf(0,2,50,0.1)
                0.1117287563
```



Achten Sie auf Reihenfolge der Parameter: (von u=0, bis o=2, n, p)

Lösung mit TI Nspire CAS

Menü: Wahrscheinlichkeit – Verteilungen – BinomialCdf:




```
binomCdf(50,0.1,0,2)        0.111729
```

Ergebnis: $P(A) = P(X \le 2) \approx 0{,}1117$

Achten Sie auf Reihenfolge der Parameter: (n, p, von u, bis o)

Merke: Die Funktion **BinomialCDf** berechnet die Summe der Wahrscheinlichkeiten von a (unterer Wert) bis b (oberer Wert).

Ereignis B: **Man findet weniger als 5 defekte Schrauben:** $X < 5$:

Ereignismenge: $B = \{0;1;2;3;4\}$

B kann sollte man günstiger so beschreiben:

Man findet höchstens 4 defekte Schrauben: $X \le 4$.

Berechnung: CASIO ClassPad:

```
binomialCDf(0,4,50,0.1)
                0.4311984068
```

TI Nspire:

```
binomCdf(50,0.1,0,4)        0.431198
```

Ergebnis: $P(X < 5) = P(X \le 4) \approx 0{,}4312$

Hinweis: *Man beachte, dass jeder Hersteller die Reihenfolge der Parameter selbst festlegen kann:*

CASIO: (von u , bis o, n, p) TI: (n, p, von u, bis p)

Die Anzahl der angezeigten Dezimalstellen kann man selbst im Rechner einstellen.

Ereignis C: **Man findet mehr als 5 aber höchstens 8 defekte Schrauben:**

Jetzt verwendet man eine Doppelungleichung: $5 < X \le 8$:

Oder <u>besser</u> so: $6 \le X \le 8$

Ergebnismenge: $C = \{6;7;8\}$

Berechnung: CASIO ClassPad:

```
binomialCDf(6,8,50,0.1)
                0.3260
```

TI Nspire:

```
binomCdf(50,0.1,6,8)        0.32601
```

Ergebnis: $P(5 < X \le 8) = P(6 \le X \le 8) \approx 0{,}3260$

Ereignis D: **Man findet mehr als 3 defekte Schrauben:** $X > 3$ bzw. $(X \ge 4)$

Ergebnismenge: $D = \{4;5;...;50\}$

Ereignis E: **Man findet mindestens 7 defekte Schrauben:** $X \ge 7$ bzw. $(X > 6)$

Ergebnismenge: $E = \{7;8;...;50\}$

Berechnungen: CASIO ClassPad:

```
binomialCDf(4,50,50,0.1)
                0.7497
binomialCDf(7,50,50,0.1)
                0.2298
```

TI Nspire:

```
binomCdf(50,0.1,4,50)       0.749706
binomCdf(50,0.1,7,50)       0.229773
```

HINWEIS auf **einfachere oder ältere Rechner**

Sie haben möglicherweise nicht die Möglichkeit, für die Verteilungsfunktion eine untere Schranke einzugeben, denn sie verwenden stets dafür die Zahl 0.
Dann muss man aber bei manchen Aufgaben mit einem Trick arbeiten:

Zu Beispiel C: $5 < X \le 8$ wird dann so berechnet:

$P(C) = P(6 \le X \le 8) = P(X \le 8) - P(X \le 5)$

Von der Wahrscheinlichkeit für die Werte $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ subtrahiert man die Wahrscheinlichkeit für die Zahlen, die nicht zu C gehören, also von $\{0;1;2;3;4;5\}$.

Zu Beispiel D: $X > 3$ bzw. $(X \ge 4)$ wird dann so berechnet:

$P(D) = P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3)$

Zu Beispiel E: $X \ge 7$ bzw. $(X > 6)$ wird dann so berechnet:

$P(E) = P(X \ge 7) = 1 - P(X \le 6)$

Rechner, die nur mit dem linken Intervallrand 0 arbeiten können, verlangen daher zu Eingabe für binomialCDf nur drei Parameter, den rechten Rand, n und p.
Das kann dann so aussehen:

TI Nspire alt: $P(X < 4) = P(X \le 3) = F_B\left(3,12,\frac{1}{12}\right) \approx 0{,}986$

$\text{binomCdf}\left(12,\frac{1}{12},0,3\right)$ 0.98617

CASIO alt: $P(X \le 5) = F_B(5;10;0{,}3) \approx 0{,}953 = 95{,}3\%$

```
binomialCDf(5,10,0.3)
         0.9526510126
```

Merke:

$X > 4$ (mehr als 4) ist das Gegenteil von $X \le 4$ (höchstens 4)

Also gilt: $\boxed{P(X > 4) = 1 - P(X \le 4)}$

$X \ge 5$ (mindestens 5) ist das Gegenteil von $X \le 4$ (höchstens 4)

Also gilt: $\boxed{P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4)}$

Lösung 7.25 Linkshänder

Rechner

30 % der Personen in Schieldorf sind Linkshänder.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man dort unter 10 Testpersonen

a) genau 3 Linkshänder

b) mindestens 2 Linkshänder

c) 3 bis 5 Linkshänder

X sei die Anzahl der Linkshänder. X ist binomial verteilt mit p = 0,3.

a) $P(X=3) = f_B(3;10;0,3) \approx 0,267 = 26,7\%$

Oder. $P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 = 120 \cdot \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 \approx 0,2668$

b) Nun geht es um „**mindestens 2**“ Linkshänder.

WISSEN: Die Funktion BinomialCdf berechnet Wahrscheinlichkeiten zu „höchstens“. Mindestens-Aufgaben kann man dann über das Gegenereignis berechnen, welches dann auch zu einer Höchstens-Aufgabe wird:

Hilfe: In der Grundmenge $G = \{0, 1 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
ist die Lösungsmenge der Ungleichung $\boxed{x \geq 2}$ blau eingefärbt.
Das Gegenereignis wird durch die Ungleichung $\boxed{x \leq 1}$ (höchstens 1) beschrieben.

Das Gegenereignis zu **mindestens 2** Linkshänder ist also **höchstens 1** Linkshänder.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,8507$$

Die Binomialverteilung liefert also:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,7^{10} - 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 \approx 0,8507$$

Neue Rechner haben allerdings eine „Von – bis“ – Option einprogrammiert, so dass man „mindestens 2“ eingeben kann als „von 2 bis 10“

c) 3 bis 5 Linkshänder führt mit der Zufallsvariablen X zur Doppel-Ungleichung $3 \leq X \leq 5$:
Mit der Binomialverteilung muss man dann 3 Werte addieren:

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$$

$$= \binom{10}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 + \binom{10}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 + \binom{10}{5} \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^5 = 0,5699 \approx 57\%$$

Oder man rechnet $P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$,
subtrahiert also die Wahrscheinlichkeiten zweier „höchstens-Ereignisse“

c) $P(X < 4) = P(X \leq 3) = F_B(3;10;0,3) \approx 0,650 = 65,0\%$

Lösung 7.26

Transistoren werden mit einer Fehlerquote von 5 % hergestellt.
In einer Lieferung befinden sich 30 Transistoren. Der Empfänger testet 7 davon.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er genau 2 defekte Transistoren?

Gegeben ist $p_{def} = 0{,}05 \Rightarrow p_{gut} = 0{,}95$.
Definition einer Zufallsvariablen:
Es sei X die Zahl der defekten Transistoren unter 7 getesteten. **X ist binomial verteilt.**

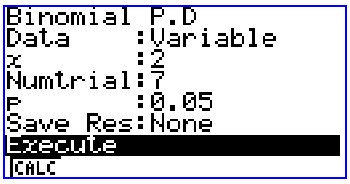
Diese Zeilen sollte man ins Heft schreiben.

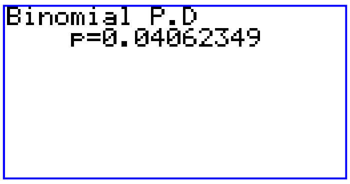
Zuerst die manuelle Lösung:

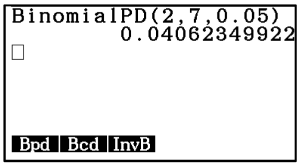
$$P(X=2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^5 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^5 \approx 0{,}0406$$

Geeignete Rechner haben dafür einprogrammierte Funktionen. Hier benötigt man die Binomialverteilung, und zwar die Funktion **Binomial P.D**. oder **binomialPdf.**

Grafik-Rechner von CASIO: altes Modell **neu: fx CG 20**

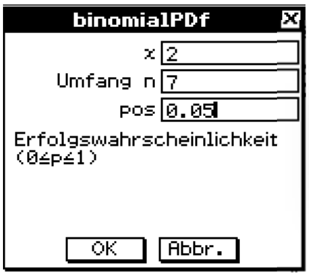


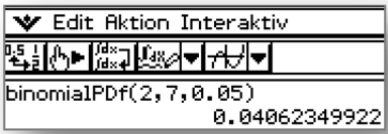




CAS-Rechner CASIO ClassPad:

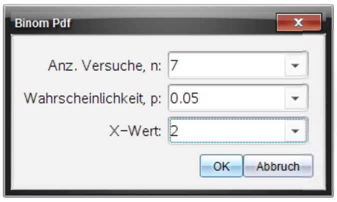
(Interaktiv:)





CAS-Rechner TI Nspire:

Man ruft das Eingabefenster im **Menü – Wahrscheinlichkeit - Verteilungen – D: binomial Pdf** auf:



b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er höchstens 1 defekten Transistor?

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}95^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}95^6 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}9556$$

Er nimmt diese Sendung mit 95,6 % Wahrscheinlichkeit an.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er mindestens 1 defekten Transistor?

Mit der Zufallsvariablen X kann man dies so ausdrücken: $P(X \geq 1)$.

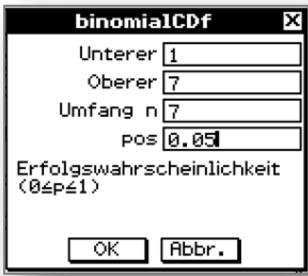
Manuelle Berechnung über das Gegenereignis („Kein defekter Transistor"):

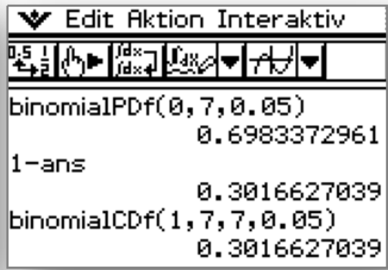
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.95^7 = 0{,}6983$$

CAS-Rechner CASIO ClassPad:

$P(X \geq 1)$ umfasst alle Werte

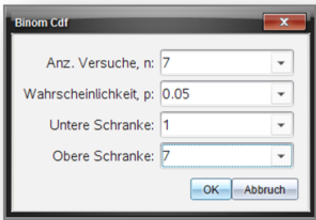
von 1 bis n = 7.

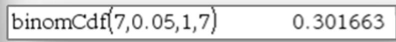




Ältere Rechner besitzen noch nicht die Eingabe-Option zu „von – bis" wie im Screenshot, sondern sie verwenden als untere Grenze stets 0.
Dann muss man so rechnen wie manuell. Das habe ich rechts in den ersten 2 Zeilen gezeigt.

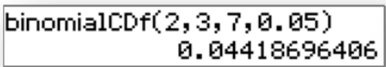
CAS-Rechner TI Nspire:

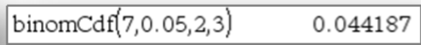




d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er 2 oder 3 defekte Transistoren?

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^5 + \binom{7}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^4 = 0{,}0442$$





e) Mit wie vielen defekten Transistoren muss er in einer Lieferung rechnen?

Der Erwartungswert für X wird so berechnet:

$$E(x) = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}05 = 1{,}5$$

Er muss also davon ausgehen, dass im Schnitt pro Packung 1,5 defekte Transistoren sind.

(Dies sind einfach 5% von 30.)

Lösung 7.27

In Kuhdorf wohnen 80 männliche und 95 weibliche Personen. 40 % der Personen sind evangelisch. Am Freitag, den 13. überqueren 12 Personen gleichzeitig den einzigen Fußgängerüberweg.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 5 von ihnen evangelisch?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es dabei geregnet?

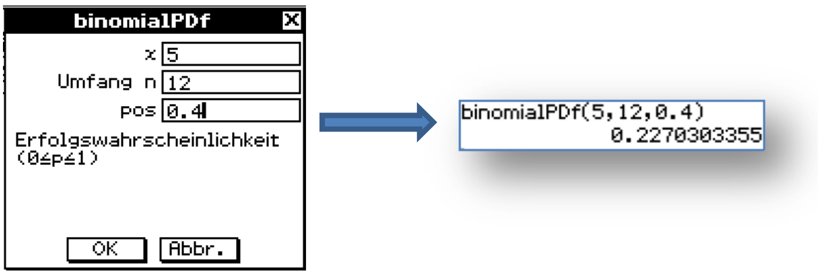
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies gerade um 12.10 Uhr?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trug einer der Passanten einen Hut?

a) Gegeben ist $p_{ev} = 0{,}4$ und $n = 12$.

X sei die Zahl der evangelischen Personen; X ist binomial verteilt.

$$P(X=5) = \binom{12}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^7 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^7 \approx 0{,}2270$$



b) bis d) sind Sch(m)erzfragen und lassen sich mathematisch nicht lösen.

Lösung 7.28

Eine Labormaus muss sich durch einen Irrgarten, den sie noch nicht kennt, einen Weg suchen.
Sie muss sich an 8 Stellen entscheiden, ob sie nach links oder rechts abbiegt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft sie

A: genau viermal nach rechts?
B: genau fünfmal in die gleiche Richtung?
C: mindestens 6-mal nach links?

Man kann davon ausgehen, dass sie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nach links bzw. rechts geht, weil sie das Labyrinth noch nicht kennt und somit noch kein Lernprozess stattgefunden hat.

Also ist $p_{li} = p_{re} = \frac{1}{2}$.

Es sei X die Zahl der Wege nach rechts. X ist binomial verteilt.

Manuelle Berechnungen:

$$P(A) = P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{\cancel{8}^{\,2} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3 \cdot 2}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{2^8} = \frac{70}{256} \approx 0{,}2734$$

$$P(B) = 2 \cdot P(X=5) = 2 \cdot \binom{8}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 2 \cdot \binom{8}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 2^8} = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

5-mal min die gleiche Richtung bedeutet 3genau 5-mal nach rechts oder genau 5-mal nach links. Da beide Richtungen gleichwahrscheinlich sind, ergeben beide Teilaufgaben dasselbe Ergebnis, weshalb man den Faktor 2 verwenden kann.

$$P(C) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_B\left(5; 8; \tfrac{1}{2}\right) = 0{,}1445$$

Obwohl sich X auf Abbiegen nach rechts bezieht, kann man auch hier X verwenden, denn die Wahrscheinlichkeiten für links und rechts sind gleich groß.

Mit TI Nspire CAS:

binomPdf(8,0.5,4)	0.273438
2·binomPdf(8,0.5,5)	0.4375
binomCdf(8,0.5,6,8)	0.144531
1−binomCdf(8,0.5,0,5)	0.144531

Zeile 3 und 4 gehören zu c).
In Zeile 3 wird „von 6 bis 8“ berechnet,
in Zeile 4 das Gegenereignis zu „höchstens 5“.

Lösung 7.29

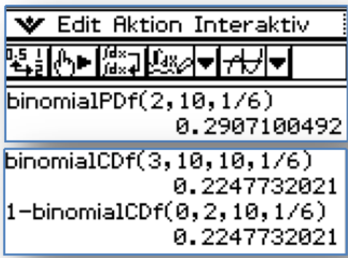
a) Mit einem idealen Würfel wird 10-mal gewürfelt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Man erhält genau 2 Einsen.
B: Man würfelt mindestens drei gerade Zahlen.
C_1: Die Augensumme ist 11
C_2: Die Augensumme ist 12
D: Man würfelt 2 Einsen, 4 Dreier und 4-mal die 5.

Das Würfeln ist stets eine Bernoulli-Kette, also muss man die Binomialverteilung anwenden:

A: Man erhält genau 2 Einsen:

$$P(A) = f_B(2;10;\tfrac{1}{6}) = \binom{10}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}2907$$

Hinweis: $f_B(x,n,p)$ ist die Binomialfunktion (binomialPdf), wie sie gerne in Tabellen geschrieben wird. Dies ist jedoch nicht einheitlich festgelegt.



B: Man würfelt mindestens vier gerade Zahlen:

Wissen: $p_{gerade} = \frac{1}{2}$

$$P(B) = P\left(X_{gerade} \geq 3\right) = P(X=3) + P(X=4) + \ldots + P(X=10)$$

Dieser Aufwand ist zu groß, daher verwendet man das Gegenereignis. $P(B) = 1 - P(X \leq 2)$

In der 1. Zeile wurde die Wahrscheinlichkeit mit der „Von 3 bis 10“-Option berechnet.
Weil das nicht alle Rechner können, steht in der 2. Zeile die Gegenereignis-Methode:

C_1: Die Augensumme ist 11:

Bei genau vier Würfen geht das nur mit 9 Einsen und einer Zwei.
Den Platz für die eine Zwei kann man auf $\binom{10}{1} = 10$ Arten aus 10 Plätzen auswählen:

$$\boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1}$$

Jeder dieser 10 Pfade hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

Also gilt: $P(C_1) = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \approx 1{,}6538 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}000.000{,}17$

Hier liegt keine Binomialverteilung vor.

C_2: Die Augensumme ist 12:

Es sind 2 Möglichkeiten denkbar: 9 Einser und eine 3 / 8 Einser und zwei Zweier.

$$\boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{3} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1}$$

$$\boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{1}$$

Zuerst die 1. Möglichkeit: Alle Pfade haben die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ und es gibt wie bei C_1 genau 10 Möglichkeiten, die 3 zu platzieren, also 10 Pfade.
Bei der zweiten Möglichkeit hat ebenso jeder Pfad die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$.

Aber 2 Plätze (für die beiden Zweier) kann man auf $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$ Arten auswählen.

$$P(C_2) = 10 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^{10} + 45 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^{10} = 55 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^{10} \approx 9{,}06 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}000.000.91$$

D: Man würfelt 2 Einsen, 4 Dreier und 4-mal die 5.

Jeder der möglichen Ereignispfade besitzt also zwei Einsen, vier Dreier und vier Fünfer.
Da jeder Zahl mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ gewürfelt wird, hat jeder Pfad die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

Nun muss man nur noch die Anzahl der möglichen Pfade (Würfelreihenfolgen) berechnen:
Jeder Pfad, der ein solches Ereignis darstellt, besteht aus 10 Plätzen.
Davon werden auf $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ Arten 2 Plätze für die Einsen ausgewählt.

Dann aus den restlichen 6 Plätzen 4 für die Dreier. Dies geht auf $\binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3}}{\cancel{4\cdot 3}\cdot 2\cdot 1} = 15$ Arten.

Dann bleiben noch 4 Plätze für die 4 Fünfer übrig. Hier hat man keine Wahl mehr.
Also gibt es insgesamt $m = \binom{10}{2}\cdot\binom{6}{4}\cdot\underbrace{\cancel{\binom{4}{4}}}_{=1} = 45\cdot 15 = 675$ Möglichkeiten, diese Pfade so zu “belegen“, wie es das Ereignis D vorschreibt.

Daraus folgt: $P(D) = 45\cdot 15\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10} \approx 0{,}000.001.1$.

b) E: Man würfelt lauter verschiedene Zahlen:

Es gibt 6 verschiedene Würfelergebnisse: 1 bis 6, und jede wird in E genau einmal gewürfelt.
Diese 6 Zahlen kann man auf 6! Arten (Permutationen) auf den 6 Pfadplätzen anordnen.
Also gibt es m = 6! (6 Fakultät = $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$ Möglichkeiten.
Und jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^{6}$:

$$P(E) = 6!\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{6} = \frac{720}{6^6} \approx 0{,}0154$$

c) Nun wird zweimal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
F: Die erste Zahl ist gerade
G: Die zweite Zahl ist kleiner als 3.
H: Es tritt F oder G ein.

F: Die erste Zahl ist gerade: $F = \{2,4,6\}$

Die Pfade für die Ziehungsergebnisse sehen so aus: $\xrightarrow{0{,}5} g \xrightarrow{1} x$

Über die zweite gewürfelte Zahl wird nichts ausgesagt, also darf sie beliebig sein,
also eine beliebige Zahl aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$. Eine davon wird also mit Sicherheit gewürfelt. Also kann man für eine beliebige Zahl x immer die Wahrscheinlichkeit 1 verwenden.

$$P(F) = \tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

G: Die zweite Zahl ist kleiner als 3.

Die erste Zahl ist offenbar beliebig: $\xrightarrow{1} x \xrightarrow{1/3} \{2,3\}$

$$P(G) = \tfrac{1}{3}$$

H: Es tritt F oder G ein.

Diese heißt verbal: Die erste Zahl ist gerade **oder** die zweite kleiner als 3.

Für das Oder-Ereignis gilt diese Formel (Additionssatz):

$$P(H) = P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$$

Darin enthalten ist die Wahrscheinlichkeit für das Und-Ereignis: $F \cap G$, das man so formulieren kann: Die erste Zahl ist gerade **und** die zweite kleiner als 3.

Zu diesem Und-Ereignis gibt es 6 Ergebnisse:

$$F \cap G = \{(2|1), (2|2), (4|1), (4|2), (6|1), (6|2),\} .$$

Es folgt: $P(F \cap G) = \frac{g}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Oder man überlegt so: F und G sind stochastisch unabhängig, also gilt:

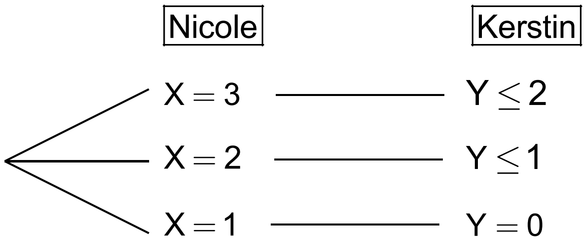
$$P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} .$$

Es folgt: $P(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Lösung 7.31

In einem Karton liegen 8 weiße und 3 schwarze Kugeln, die „blind" nicht unterscheidbar sind.
Nicole zieht 3 Kugeln mit Zurücklegen und Kerstin zwei.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Nicole mehr weiße Kugeln als Kerstin?

Man zeichnet einen Teil-Baum, der nur die Pfade enthält, die für das Ereignis günstig sind.
X sei die Anzahl der weißen Kugeln von Nicole und Y die der weißen Kugeln von Kerstin.
X und Y sind binomial verteilt.

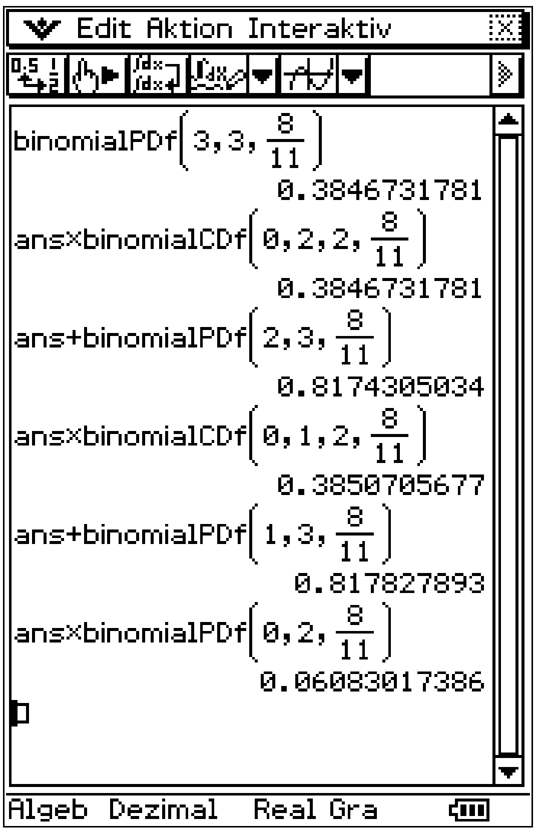


Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich damit so:

$$P = \underbrace{P(X=3)\cdot P(Y\le 2)}_{1.\text{Pfad}} + \underbrace{P(X=2)\cdot P(Y\le 1)}_{2.\text{Pfad}} + \underbrace{P(X=1)\cdot P(Y=1)}_{3.\text{Pfad}}$$

Hinweis. Man kann das Baumdiagramm auch so gestalten wie in Aufgabe 11 !

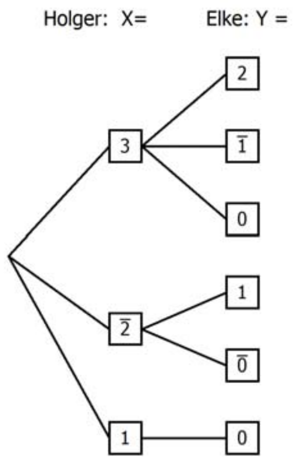
Berechnung CASIO ClassPad:



Lösung 7.32

Holger wirft drei ideale Münzen. Elke zwei.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft Holger mehr Wappen als Elke?



Es sei X die Zahl der Wappen für Holger mit $p_W = 0{,}5$.

Y sei die Zahl der Wappen für Elke. X und Y sind binomial verteilt.

Das Baumdiagramm beinhaltet nur die Fälle,
in denen Holger mehr Wappen erzielt als Elke.
Die anderen Pfade werden jetzt nicht benötigt:

E sei das Ereignis: Holger erzielt mehr Wappen als Elke. Aus dem Baum erkennt man:

$$P(E) = P(X=3)\cdot P(Y\le 2) + P(X=2)\cdot P(Y\le 1) + P(X=1)\cdot P(Y=0)$$

$$= \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right]\cdot[1] + \left[3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\tfrac{1}{2}\right]\cdot\left[2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] + \left[3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{8} + 3\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{4} + 3\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{4+9+3}{32} = \tfrac{16}{32} = \tfrac{1}{2} \wedge$$

Mit so schönen Brüchen geht das ganz ohne Rechnereinsatz.

Lösung 7.33

> Die Fußballmannschaft A gewinnt gegen B erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und verliert mit der Wahrscheinlichkeit 0,3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
> (a) gibt es ein Unentschieden?
> (b) gewinnt A fünfmal nacheinander?
> (c) schneidet B bei 4 Spielen insgesamt besser ab als A?
> (d) enden mindestens 2 von 3 Spielen unentschieden?

Gegeben sind diese Wahrscheinlichkeiten: $p_{A\ gew.} = 0{,}6$, $p_{B\ gew.} = 0{,}3$

a) Für ein Unentschieden folgt die Wahrscheinlichkeit $p_{unentsch.} = 1 - 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}1$

b) $P = 0{,}6^5 \approx 0{,}0778$

c) In folgenden Fällen schneidet B in 4 Wettkämpfen besser ab als A:

1. B gewinnt 4-mal: $P_1 = 0{,}3^4$
2. B gewinnt 3-mal, A 1 mal $P_2 = \binom{4}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}6$
3. B gewinnt 3-mal, 1 Unentschieden $P_3 = \binom{4}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}1$
4. B gewinnt 2-mal, A 1-mal, 1 Remis $P_4 = \underbrace{\binom{4}{2} \cdot 2}_{\text{Zahl der Pfade}} \cdot \underbrace{0{,}3^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1}_{\text{Wkt. jedes Pfades}}$

Hilfe: Von 4 Spielen gewinnt B 2, also kann man auf $\binom{4}{2}$ Arten 2 Gewinnspiele aus 4 Spielen „auswählen". Von den restlichen 2 wird eines Unentschieden ausgehen. Dieses kann eines von den beiden restlichen Spielen sein.

5. B gewinnt 2-mal, 2 Unentschieden $P_5 = \binom{4}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}1^2$
6. B gewinnt 1-mal, 3 Unentschieden $P_6 = \binom{4}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1^3$

$$P(E) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$$

$$P(E) = 0{,}3^4 + 4 \cdot (0{,}3)^3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}06 + 6 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}1^2 + 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1^3$$

$$= 0{,}0081 + 2{,}4 \cdot 0{,}027 + 0{,}4 \cdot 0{,}027 + 12 \cdot 0{,}0054 + 0{,}0054 + 0{,}0012 = 0{,}1551$$

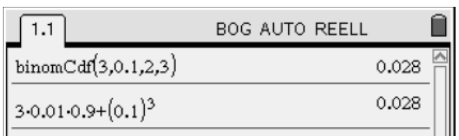
d) 2 Spiele enden Unentschieden: $\binom{3}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9$

Alle 3 Spiele enden Unentschieden: $0{,}1^3$

Summe: 0.028

Oder mit der Zufallsvariablen U = Zahl der unentschiedenen Spiele: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$

Mit Nspire berechnet:



Lösung 7.34

Bei einem Multiple-Choice-Test stehen jeder Frage 3 Antworten zum Ankreuzen gegenüber, von denen genau 1 richtig ist. Es darf auch nur eine Antwort angekreuzt werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim bloßen Raten mehr als die Hälfte der 4 Fragen beantwortet?

Also gilt: $p_r = \frac{1}{3}$ und $p_f = \frac{2}{3}$.

Ich formuliere günstiger: Er kreuzt höchstens Fragen falsch an.

Alle richtig: $P(\text{alle } r) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Eine falsch, 3 richtig: $P(\text{eine } f) = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$

Summe: $P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111$

b) Wie lautet die Antwort, wenn er bei den ersten zwei Fragen jeweils eine falsche Antwort ausschließen kann?

Dann sind für die ersten zwei Fragen die Wahrscheinlichkeiten für r bzw. falsch $\frac{1}{2}$

(1) Alle richtig: $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r$

(2) 1. Antwort falsch: $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} f \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r$

(3) 2. Antwort falsch: $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} f \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r$

(4) 3. Antwort falsch: $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{2}{3}]{} f \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r$

(5) 4. Antwort falsch: $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} r \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} r \xrightarrow[\frac{2}{3}]{} f$

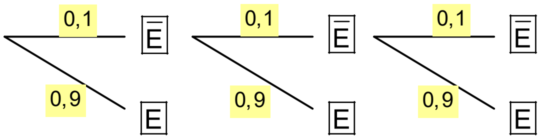
$$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{36} \approx 0{,}1944$$

Lösung 7.35

Bei einer Produktion wird jeder Artikel dreimal unabhängig voneinander auf Qualität geprüft. Dies macht man, weil bei einer Prüfung ein Fehler nur mit 90% Wahrscheinlichkeit gefunden wird.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fehler bei diesen 3 Tests entdeckt?

Hier liegt ein dreistufiges Experiment vor, dessen abgekürzter Baum so aussehen kann:



Dabei ist E das Ereignis: Fehler wird entdeckt, mit $p = 0,9$

$\overline{E}$ ist das Gegenereignis: Es wird kein Fehler entdeckt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler entdeckt wird, berechnet man aus den unteren Pfaden:

$$P(E) = 0,9 + 0,1 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,9 + 0,09 + 0,009 = 0,999$$

Schneller geht es, wenn man die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses berechnet, also des 1. Pfades. Er gehört zum Ereignis: Es wird dreimal kein Fehler gefunden:

$$P(\overline{E}) = 0,1^3 = 0,001.$$

Daraus folgt: $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0,001 = 0,999.$ (1)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden bei diesem Testverfahren von 10 defekten Artikeln mindestens 8 bzw. alle 10 entdeckt?

Es sei X die Zufallsvariable „Anzahl der entdeckten fehlerhaften Artikel".

X ist binomial verteilt mit p = 0,999 (aus a).

Dann entdeckt man 8 fehlerhafte mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

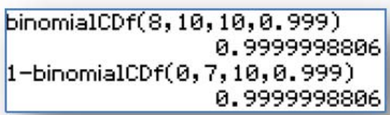
Mit einem einfachen Taschenrechner muss man so rechnen:

$$P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,999^8 \cdot 0,001^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,999^9 \cdot 0,001^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,999^{10} \cdot 0,001^0$$

$$P(X \geq 8) = 45 \cdot 0,999^8 \cdot 0,001^2 + 10 \cdot 0,999^9 \cdot 0,001 + \cdot 0,999^{10} \approx 0,999.999.881$$

Rechnerscreenshot: 1. Zeile: „von 8 bis 10"

2. Zeile: Gegenereignis zu höchstens 7



„Genau alle 10 Fehler" findet man mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = 10) = 0.999^{10} \approx 0,99004 \approx 99\%.$$

Lösung 7.36

In einem Bauernhof wird Schweinezucht betrieben. Diese Tiere werden zu jeweils 6 Tieren in sogenannten Koben gehalten. Der Bauer besitzt 10 Koben. Es besteht nun der Verdacht, dass im Stall eine Krankheit ausgebrochen ist. Diese Krankheit wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,06 angenommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Koben mindestens ein Tier erkrankt ist

Es sei X die Zahl der erkrankten Tiere. X ist binomial verteilt mit p = 0,06.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}06^{O}\cdot 0{,}94^{5}=0{,}94^{5}\approx 0{,}734\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass somit in einem Koben ein Tier erkrankt ist (also mindestens eines) ist folglich: $P_K = 1-0{,}734 = 0{,}266$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Koben frei von dieser Krankheit bzw. alle Koben infiziert?

Es sei nun Y die Zahl der Koben, in denen ein Befund entdeckt wird. Y ist binomial verteilt mit p = 0,266.

Alle Koben sind frei von Befund mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(Y=0)=(1-0{,}266)^{10}=0{,}734^{10}=0{,}045$$

Jeder Koben ist befallen:

$$P(Y=10)=0{,}266^{10}\approx 1{,}8\cdot 10^{-6}$$

c) Diese Berechnung macht wirtschaftlichen Sinn: Es ist preiswerter, das Blut aller Tiere eines Kobens zu mischen und dann eine Blutuntersuchung dieses Kobens zu machen, als von vorne herein jedes Tier zu untersuchen. Erst wenn in einem Koben ein Befund festgestellt worden ist, kann man jedes Tier einzeln testen. Stelle dazu Berechnungen über zu erwartenden Kosten an.

Berechnung des Erwartungswerts der Kosten, wenn eine Laboruntersuchung 10 Euro kostet.

1. Option: Untersuchung der Blutmischung in 10 Koben $E_K = 100\text{ €}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Koben befallen ist, ist oben zu 0,266 berechnet worden.

Also rechnet man mit $10\cdot 0{,}266 = 2{,}66$ befallenen Koben.

Die Untersuchung aller 6 Tiere eines Kobens kostet 60 €.

Für die zu erwartenden 2,66 Koben fallen also $2{,}66\cdot 60\text{ €} = 159{,}60\text{ €}$ an.

Dazu kommen die Kosten für die 10 Kobenteste in Höhe von 100 €.

Zusammen fallen somit $100\text{ €} + 159{,}60\text{ €} = 259{,}60\text{ €}$ an.

2. Option: Einzeltests aller 60 Tiere der 10 Koben: $60\cdot 10\text{ €} = 600\text{ €}$

Lösung 7.50

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln mit den Nummern 1, 2, 2, 2, 3, 3.

a) Zuerst werden 10 Kugeln zufällig der Reihe nach entnommen und sofort wieder zurückgelegt. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

Gegeben sind folgende Grundwahrscheinlichkeiten: $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ und $p_3 = \frac{1}{3}$.

Es wird 10-mal mit Zurücklegen gezogen. Dann liegt eine Bernoullikette vor und man kann die Binomialverteilung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten verwenden.

A: Man erhält genau zweimal die Kugel 1.

$$P(A) = \binom{10}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}2907$$

B: Es werden 3 Zweier, 5 Dreier und zwei Einser gezogen.

$$P(B) = \binom{10}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{7}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \binom{2}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8}}{\cancel{6}} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{6}}{2} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{8}} \cdot \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{36} = 0{,}07$$

C: Man erhält höchstens 7 Zweier.

Nun sei X die Zahl der Zweier:

$$P(C) = P(X \le 7) = 1 - P(X = 8) - P(X = 9) - P(X = 10)$$

$$= 1 - \binom{10}{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 \cdot \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} = 1 - (45 + 10 + 1) \cdot \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{56}{1024} \approx 0{,}9453$$

D: Die ersten drei Kugeln tragen verschiedene Zahlen, dann folgen nur noch Zweier.

$$P(D) = \cancel{3!} \cdot \cancel{\tfrac{1}{6}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{3 \cdot 2^8} \approx 0{,}0013$$

E: Es werden genau 4 Kugeln mit der Zahl 2 gezogen, und diese erhält man nacheinander.

$$P(E) = 7 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{1024} \approx 0{,}0068$$

Ein Pfad von E ist: $2 - 2 - 2 - 2 - \overline{2} - \overline{2} - \overline{2} - \overline{2} - \overline{2} - \overline{2}$

b) Wie große ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei Entnehmen mit Zurücklegen von 4 Kugeln die Summe 6 erhält?

Es werden vier Kugeln entnommen und zurückgelegt. Die Augensumme 6 erhält man mit 3 Kugeln nur so: 1+1+1+3 = 6 oder 1+1+2+2 = 6.

Die erste Möglichkeit geht auf 4 Arten, die zweite auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten!

$$P = 4 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \tfrac{1}{3} + 6 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{6^3 \cdot 3} + \frac{6}{36 \cdot 4} = \ldots \approx 0{,}0478$$

c) Heidi entnimmt zwei Kugeln mit einem Griff. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben die Zahlen die Summe 4?

Der Urneninhalt ist {1, 2, 2, 2, 3, 3}.

Zwei Kugeln mit einem Griff ergeben die Augensumme 4 so:

1 + 3 oder 2 + 2 oder 3 + 1.

$$P_{ASu4} = \underbrace{\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{5}}_{1\text{ dann }3} + \underbrace{\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{5}}_{2\text{ dann }2} + \underbrace{\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{5}}_{3\text{ dann }1} = \tfrac{2+6+2}{30} = \tfrac{10}{30} = \tfrac{1}{3}$$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim Entnehmen von 20-mal zwei Kugeln mit einem Griff genau viermal die Summe 4?

Mit wie viel „Treffern“ (= Augensumme 4) kann man mit 20 Entnahmen rechnen?

Aus (c) übernehmen wir $p_{ASu4} = \frac{1}{3}$.
Bei 20 Entnahmen kann man mit $E = np = 20\cdot\frac{1}{3} = \frac{20}{3} \approx 7$ „Treffern“ rechnen, also mit der Augensumme 4.

Genau 4-mal tritt dies mit folgender Wahrscheinlichkeit ein:

$$P(4-\text{mal ASu4}) = \binom{20}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{16} = \frac{20!\cdot 2^{16}}{4!\cdot 16!\cdot 3^{20}} \approx 0{,}0911$$

Lösung 7.51 Bunte Glaskugeln

In einer Packung Glaskugeln befinden sich stets 20 Kugeln, darunter sollen laut Hersteller im Schnitt 5 blaue Kugeln sein. Der Händler überprüft dies, öffnet dazu eine Schachtel und zählt die blauen Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er in einer Packung

a) genau 7 blaue Kugeln?

b) weniger als 5 blaue Kugeln?

a) genau 7 blaue Kugeln (Ereignis A)?

$$P(A) = P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} = \frac{20! \cdot 3^{13}}{7!\ 13! \cdot 4^{20}} \approx 0{,}1124$$

b) weniger als 5 Kugeln?

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: "Weniger als 5 blaue Kugeln unter 20 Kugeln":

$$P(B) = P(X<5) = P(X \le 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

Eine Packung mit 7 blauen Kugeln heißt Edelpackung.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man

c) unter 10 Packungen sogar 3 Edelpackungen?

d) unter 50 Packungen mindestens 10 Edelpackungen?

e) unter 25 Packungen 5 bis 7 Edelpackungen?

c) unter 10 Packungen sogar 3 Edelpackungen?

Es sei Y die Zahl der Edelpackungen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Packung eine Edelpackung ist, wurde in a) zu 0,1124 bestimmt. Y ist binomial verteilt.

$$P(C) = P(Y=3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}1124^3 \cdot 0{,}8876^7 \approx 0{,}0740$$

d) unter 50 Packungen mindestens 10 Edelpackungen?

$$P(D) = P(Y \ge 10) = 1 - P(Y \le 9) = 1 - F_B(9{,}50{,}0.1124) \approx 0{,}0492\ .$$

e) unter 25 Packungen 5 bis 7 Edelpackungen?

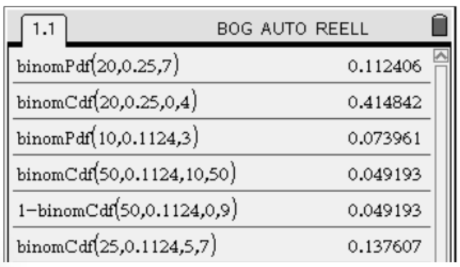
$$P(E) = P(5 \le Y \le 7) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) \approx 0{,}138$$

Hier die Screenshots zweier CAS-Rechner:

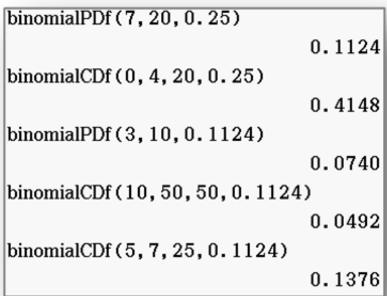
(1) TI Nspire:

d) unter 50 Packungen mindestens 10 Edelpackungen?

4. Zeile oder 5. Zeile



(2) CASIO ClassPad:

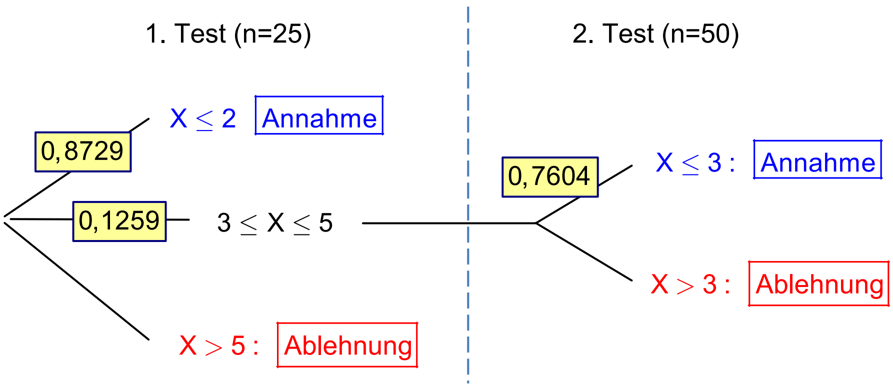


Lösung 7.52 Annahme-Wahrscheinlichkeit

Ein Händler erhält von einem neuen Lieferanten eine Sendung mit 1000 Glühbirnen. Dessen Angabe lautet: Eine Glühlampe ist zu 95% Wahrscheinlichkeit gut. Der Händler beschließt folgendes **Testverfahren**: Zunächst prüft er 25 Glühlampen. Sind darunter höchstens 2 defekte, nimmt er die Sendung an. Findet er mehr als 5 defekte, schickt er sie zurück. Bei 3 bis 5 defekten will er einen ungünstigen Zufall ausschließen und testet weitere 50 Glühbirnen. Sind darunter höchstens 3 defekte, dann nimmt er die Sendung an, in jedem anderen Fall wird sie zurückgeschickt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Sendung an?
Zeichne zuerst ein Annahme-Diagramm in Form eines Baumdiagramms.

X sei die Zahl der defekten Glühbirnen mit p = 0,05. X ist binomial verteilt.

Baumdiagramm:



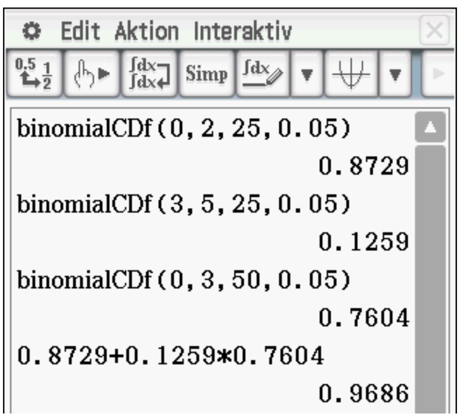
Berechnung der Teil-Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \le 2) = F_B(2{,}25{,}0.05) = 0{,}8729$$
$$P(3 \le X \le 5) = F_B(5{,}25{,}0.05) - F_B(2{,}25{,}0.05) = 0{,}9988 - 0{,}8729 = 0{,}1259$$
$$P(X \le 3) = F_B(3{,}50{,}0.05) = 0{,}7604$$

<u>Annahme-Wahrscheinlichkeit:</u>

$$P(\text{Annahme}) = 0{,}8729 + 0{,}1259 \cdot 0{,}7604 = 0{,}9686$$

Hier dazu ein Screenshot von CASIO:



Lösung 7.53

Transistoren einer Baureihe sind mit 6,5 % defekt, wobei sie diese Fehler

A: Die Spannungsfestigkeit ist nicht garantiert

B: Die Stromverstärkung liegt außerhalb der Toleranzgrenze

haben können.

Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Schon ein Fehler macht den Transistor unbrauchbar. Der Fehler A tritt mit einer absoluten Häufigkeit von 4 % auf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt B auf, und mit welcher beide zusammen?

Der Begriff „defekt“ entspricht einem ODER-Ereignis:

Ein Transistor ist defekt, wenn er den Fehler A hat ODER den Fehler B.

Daher darf man den Additionssatz anwenden:

$$P_{def} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (1)$$

Wegen der Unabhängigkeit der Fehler folgt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Also lautet der Additionssatz nun so:

$$\boxed{P_{def} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)} \qquad (2)$$

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten $P_{def} = 0{,}065$ und $P(A) = 0{,}04$.

Daher kann man durch Umstellen der Gleichung (2) die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ berechnen:

Durch Umstellen folgt aus (2):

$$P_{def} - P(A) = P(B)(1 - P(A))$$

$$P(B) = \frac{P_{def} - P(A)}{(1 - P(A))}$$

$$P(B) = \frac{0{,}065 - 0{,}04}{1 - 0{,}04} = \frac{0{,}025}{0{,}96} \approx 0{,}026$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten beide Fehler zugleich auf?

„Zugleich“ bedeutet Fehler A und Fehler B. Und dazu gehört das Ereignis $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}04 \cdot 0{,}026 \approx 0{,}00104$$

Ergebnis: B tritt mit der Wahrscheinlichkeit 2,6 % auf.

Die beiden Fehler treten mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 % gleichzeitig auf.

b) Wie viele defekte Transistoren kann man in einer Packung von 20 Stück erwarten?

Es sei X die Zahl der defekten Transistoren in einer Stichprobe vom Umfang 20.

X ist binomial verteilt mit $p = 0{,}065$.

Der Erwartungswert von X ist $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}065 = 1{,}3$

Ergebnis: Man kann im Durchschnitt unter 20 Transistoren also mit 1,3 defekten rechnen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 2 defekte in einer Packung?

$$P(X \le 2) = 0{,}935^{20} + 20 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}935^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}065^2 \cdot 0{,}935^{18} \approx 0{,}8627$$

Berechenbar auch mit der Verteilungsfunktion:

```
binomialCDf(0,2,20,0.065)
                0.862737369
```

Ergebnis: Man findet also höchstens 2 defekte mit der Wahrscheinlichkeit 0,8627.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt dies (höchstens 2 defekte pro Packung) für alle 12 Packungen einer Lieferung?

Um die Packungen zu zählen, benötigt man eine neue Zufallsvariable:

Es sei Y die Zahl der Packungen in einer Sendung vom Umfang 12, die maximal 2 defekte Transistoren beinhalten. Y ist binomial verteilt mit p = 0,8627.

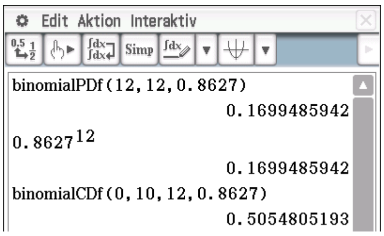
Alle 12 Packungen enthalten höchstens 2 defekte Transistoren pro Packung:

$$P(Y = 12) = 0{,}8627^{12} \approx 0{,}1699$$

Für höchstens 10 Packungen gilt, dass sie höchstens 2 defekte Transistoren pro Packung enthalten:

$$P(Y \le 10) = 1 - P(Y = 11) - P(Y = 12) = 1 - 12 \cdot 0{,}8627^{11} \cdot 0{,}1373 - 0{,}1699 \approx 0{,}505$$

Mit CASIO ClassPad wurde $P(X = 12)$ gleich auf zwei Arten berechnet und $P(Y \le 10)$ mit der Verteilungsfunktion CDf.

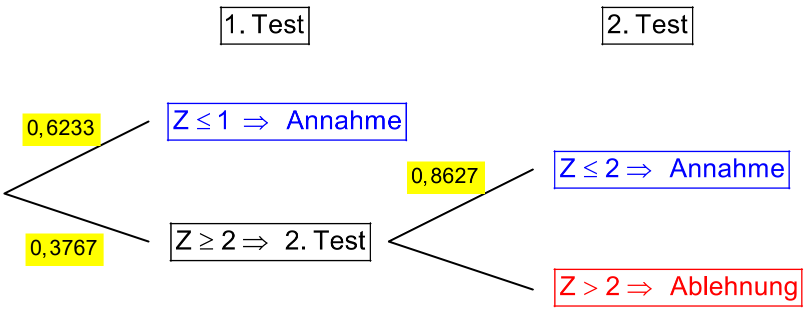


c) Ein Händler testet eine Sendung und wählt dazu eine Packung zufällig aus. Findet er darin höchstens einen defekten Transistor, nimmt er die Sendung an, sonst testet er eine zweite Packung. Findet er darin höchstens 2 defekte, nimmt er die ganze Sendung an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Sendung an?

Z sei die Zahl der defekten Transistoren pro Packung, in der 20 Transistoren sind.

Es wird empfohlen, einen solchen Strukturbaum zu erstellen.

Er stellt das Testverfahren als 2-stufiges Experiment dar:



Berechnung der Annahme-Wahrscheinlichkeit:

1. Pfad. $P(Z \le 1) = 0{,}935^{20} + 20 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}935^{19} \approx 0{,}6233$

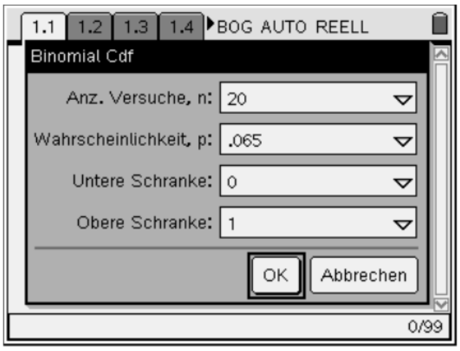
$P(Z \le 2) = P(Z \le 1) + \binom{20}{2} \cdot 0{,}065^2 \cdot 0{,}935^{18} \approx 0{,}8627$

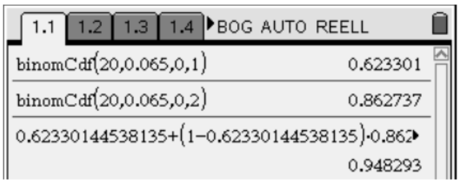
2. Pfad: $P(Z \ge 2) \cdot P(Z \le 2)$

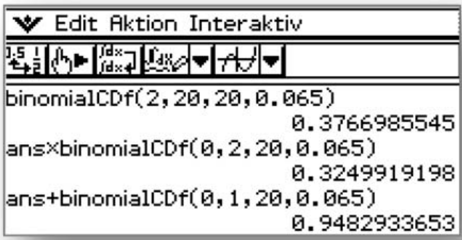
$$P(\text{Annahme}) = P(Z \le 1) + P(Z \ge 2) \cdot P(Z \le 2) = 0{,}6233 + 0{,}3767 \cdot 0{,}8627 \approx 0{,}9483$$

Die Screenshots zeigen die Eingabe zur Berechnung von $P(Z \le 1) = F_B(1;20;0{,}065)$

und zur Berechnung der Annahme-Wahrscheinlichkeit.







Bei CASIO ClassPad habe ich die Reihenfolge der Rechnung so gewählt, dass ich mit $P(Z \ge 2) \cdot P(Z \le 2)$ begonnen habe, dann wurde dazu $P(Z \le 1)$ addiert.

Lösung 7.54

Kondensatoren einer Produktion sind zu 35 % 2. Wahl und zu 5 % defekt.

a) Einer Packung werden 20 entnommen und geprüft.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

Die Grundwahrscheinlichkeiten sind $p_{2W} = 0{,}35$, $p_{def} = 0{,}05$ also $p_{1W} = 0{,}6$.

Der Umfang der Stichprobe ist n = 20.

A: Alle 20 sind 1. Wahl: $P(A) = 0{,}6^{20} \approx 0{,}000.037$

B: Genau 3 sind 2. Wahl: $P(B) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^{17} \approx 0{,}0323$

C: Mindestens 3 sind defekt:

Nun sei X die Zahl der defekten Kondensatoren. X ist binomial verteilt mit $p_{def} = 0{,}95$:

$$P(C) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$
$$= 1 - 0{,}95^{20} - 20 \cdot 0{,}95^{19} \cdot 0{,}05 - \binom{20}{2} 0{,}95^{18} \cdot 0{,}05^2 \approx 0{,}0755$$

Oder mit Verwendung der Verteilungsfunktion F_B:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_B(2\,;20\,;0{,}05) \approx 1 - (1 - 0{,}9245) = 0{,}0755\,.$$

D: Nur die ersten 3 sind 2. Wahl: $P(D) = 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^{17} = 0{,}000.028.9$

(Hier liegt nur 1 Pfad vor!)

E: Nacheinander werden 15 Kondensatoren 1. Wahl entnommen. Der Rest ist keine 1. Wahl:

$$P(E) = 6 \cdot 0{,}6^{15} \cdot 0{,}4^5 = 0{,}000.028.9\,,$$

denn der Pfad sieht so aus:

$$\underbrace{1.W - 1.W - .... - 1.W - 1.W}_{15} - x - x - x - x - x$$

F: Die beiden ersten sind defekt, die letzten 5 sind 2. Wahl, der Rest ist 1. Wahl.

Hinter den ersten 15 Plätzen gibt es noch weitere 20-15 = 5, also gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten, diese Kette von 1. Wahl-Kondensatoren in Reihe anzuordnen.

$$F: \quad d - d - \underbrace{1.W - 1.W - ... - 1.W}_{13} - 2.W - 2.W - 2.W - 2.W - 2.W$$

$$P(F) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}6^{13} \cdot 0{,}35^5 = 0{,}000.000.017$$

b) In einem Karton sind 50 Kondensatoren dieser Produktion.
Mit wie vielen Kondensatoren 1. bzw. 2. Wahl kann man rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Kondensatoren 1. Wahl vom Erwartungswert um höchstens 2 ab?

Erwartungswerte:

$$E(1.\text{Wahl}) = n \cdot p_{1W} = 50 \cdot 0,6 = 30$$

$$E(2.\text{Wahl}) = n \cdot p_{2W} = 50 \cdot 0,35 = 17,5$$

$$E(\text{defekt}) = n \cdot p_{def} = 50 \cdot 0,05 = 2,5$$

Es sei Y die Zahl der Kondensatoren 1. Wahl, dann lautet die Aufgabe:

$$P(28 \le Y \le 32) = \binom{50}{28} \cdot 0,6^{28} \cdot 0,4^{22} + \binom{50}{29} \cdot 0,6^{29} \cdot 0,4^{21} + \binom{50}{30} \cdot 0,6^{30} \cdot 0,4^{20} +$$

$$+ \binom{50}{31} \cdot 0,6^{31} \cdot 0,4^{19} + \binom{50}{32} \cdot 0,6^{32} \cdot 0,4^{18} \approx 0,5291$$

Dies geht schneller, wenn man eine Tafel der Verteilungsfunktion zur Verfügung hat:

$$P(28 \le Y \le 32) = F_B(32\,;50\,;0,6) - F_B(27\,;50\,;0,6) =$$

Mit Tafel: $\approx (1 - 0,2369) - (1 - 0,7660) = 0,7660 - 0,2369 = 0,5291$

c) Ein Karton heißt ***brauchbar***, wenn er höchstens einen defekten Kondensator enthält.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Karton mit 50 Kondensatoren brauchbar?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 10 Kartons höchstens 2 unbrauchbare findet?

Hier liegt eine geschachtelte Aufgabe vor. Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit für brauchbare Kartons berechnet:

X war die Zahl der defekten Kondensatoren. Dies beziehen wir jetzt auf n = 50.

X ist binomial verteilt:

$$P(X \le 1) = 0,95^{50} + 50 \cdot 0,95^{49} \cdot 0,050 = 0,2704 = p_{\text{brauchbar}}$$

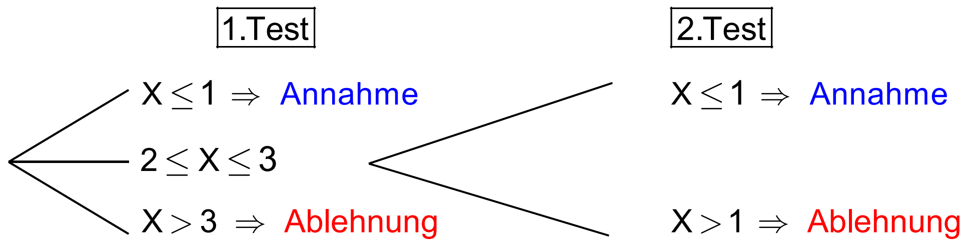
Es sei nun Z die Zahl der brauchbaren Kartons unter den 10 Kartons.

Auch Z ist binomial verteilt.

$$P(Z \le 2) = 0,2794^{10} + 10 \cdot 0,2794^{9} \cdot 0,7206 + \binom{10}{2} \cdot 0,2794^{2} \cdot 0,7206^{2} \approx 0,4395$$

d) Ein Händler testet einen Karton mit 50 Kondensatoren. Er will damit testen, ob er die Lieferung annimmt. Findet er unter 20 Kondensatoren höchstens einen defekten, nimmt er die Lieferung an. Bei mehr als drei defekten lehnt er sie ab. Bei 2 oder 3 defekten testet er weitere 20 Kondensatoren. Ist darunter dann höchstens 1 defekter, dann nimmt er die Sendung an. Berechne die Annahme-Wahrscheinlichkeit.

Wir zeichnen ein sogenanntes Annahme-Diagramm, also einen Baum, der diese Fälle regelt.
Für beide Tests ist n = 50.



Nebenrechnungen:

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}95^{20} + 0{,}95^{19} \cdot 0{,}05 = 0{,}7358$$

$$P(2 \le X \le 3) = P(X=2) + P(X=3) = \binom{20}{2} 0{,}95^{18} \cdot 0{,}05^2 + \binom{20}{2} 0{,}95^{17} \cdot 0{,}05^3 \approx 0{,}2485$$

Annahme-Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Annahme}) = 0{,}7358 + 0{,}2485 \cdot 0{,}7358 \approx 0{,}9185 .$$

e) Diese Kondensatoren können die Fehler F_1 oder F_2 haben. Ein Kondensator mit genau einem dieser Fehler heißt 2. Wahl, treten beide auf, liegt Ausschussware vor (defekt). Zeichne ein Baumdiagramm zur Veranschaulichung dieses Vorgehens. Berechne $p_1 = P(F_1)$ und $p_2 = P(F_2)$ unter der Annahme, dass die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind!

Lösung:

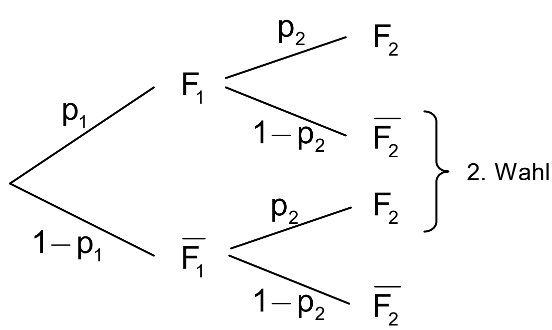
$$p_{def} = P(F_1 \cap F_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}05 \qquad (1)$$

$$p_{2.Wahl} = P(F_1) + P(F_2) - 2 \cdot P(F_1 \cap F_2)$$

$$0{,}35 = P(F_1) + P(F_2) - 2 \cdot 0{,}05$$

$$p_1 + p_2 = 0{,}45 \text{ bzw. } p_2 = 0{,}45 - p_1$$

in (1): $\qquad p_1 \cdot (0{,}45 - p_1) = 0{,}05$



Führt auf $\quad p_1^2 - 0{,}45 \cdot p_1 + 0{,}05 = 0$ mit

$$p_1 = \frac{0{,}45 \pm \sqrt{0{,}45^2 - 4 \cdot 0{,}05}}{2} = \frac{0{,}45 \pm 0{,}05}{2} = \begin{cases} 0{,}25 \Rightarrow p_2 = 0{,}20 \\ 0{,}20 \Rightarrow p_1 = 0{,}25 \end{cases}.$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeiten sind 0,20 und 0,25 (vertauschbar).

Lösung 7.55

Ein Glücksrad hat 8 gleich große Sektoren, von denen einer rot drei weiß und vier blau gefärbt sind.. Nach dem Drehen des Rades, zeigt ein Pfeil immer auf genau ein Feld.

a) Das Rad wird viermal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X = Anzahl der weißen Felder (als Ergebnis nach vier Drehungen). Zeichne ein Histogramm.

Grundwahrscheinlichkeiten für das Glücksrad:

1 der 8 Felder ist rot, also ist $p_r = \frac{1}{8}$. Entsprechend ist $p_w = \frac{3}{8}$, $p_b = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

X sei die Zahl der weißen Felder. Vier Drehungen werden durchgeführt. Das entspricht einer vierstufigen Bernoullikette, also berechnet man die Wahrscheinlichkeit mit der Binomialverteilung:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{4-k}}$$

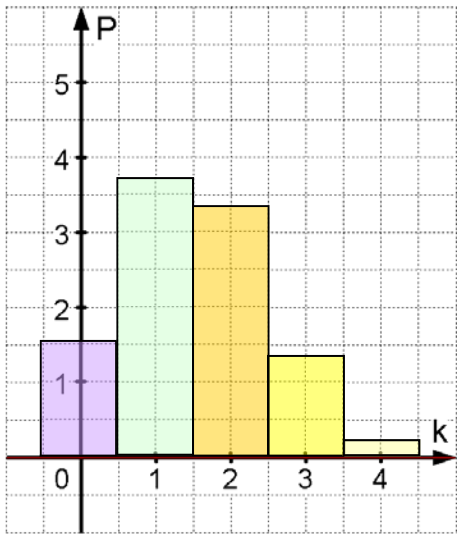
$$P(X=0) = \left(\tfrac{5}{8}\right)^4 \approx 0{,}1526$$

$$P(X=1) = 4 \cdot \tfrac{3}{8} \cdot \left(\tfrac{5}{8}\right)^3 \approx 0{,}3662$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 6 \cdot \frac{9 \cdot 25}{8^4} \approx 0{,}3296$$

$$P(X=3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{20 \cdot 27}{8^4} \approx 0{,}1318$$

$$P(X=4) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 \approx 0{,}0198$$



b) Das Rad wird siebenmal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Blau erscheint höchstens fünfmal.

n = 7 (Drehungen). Y sei die Zahl der blauen Felder.

$$P(A) = P(Y \le 5) = 1 - P(Y=6) - P(Y=7)$$

$$P(A) = 1 - 7 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 = 1 - 8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 = 1 - \frac{2^3}{2^7} = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

B: Die ersten drei Felder sind blau, dann folgt zweimal rot und zweimal weiß.

Hier gibt es nur eine einzige Möglichkeit, also ein Pfad:

$$P(B) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8^5} \approx 0{,}0003$$

C: Es erscheint abwechselnd weiß und nicht weiß.

Dies lässt sich auf zweierlei Arten realisieren: $\begin{cases} w - \overline{w} - w - \overline{w} - w - \overline{w} - w \\ \overline{w} - w - \overline{w} - w - \overline{w} - w - \overline{w} \end{cases}$

$$P(C) = \left(\tfrac{3}{8}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{5}{8}\right)^3 + \left(\tfrac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{8}\right)^4 = \left(\tfrac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{8}\right)^3 \cdot \underbrace{\left[\tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{8}\right]}_{1} = \left(\tfrac{15}{64}\right)^3 \approx 0{,}0129$$

Ausklammern ist hier ein günstiger Rechentrick!

D: Bei den ersten drei Drehungen erhält man kein rot, unter den restlichen kommt rot genau zweimal vor.

$$\text{D:} \quad \overline{r} - \overline{r} - \overline{r} - \square - \square - \square - \square$$

Für die ersten drei Plätze hat man nur eine Möglichkeit, also keine Wahl. Unter den 4 offenen Plätzen müssen dann 4 rote sein:

$$P(D) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^5 \approx 0{,}0481$$

E: Man erhält genau 3 blaue Felder, 3 weiße und 1 rotes.

Zuerst wählt man aus den 7 Plätzen eines Pfades 3 für die blauen aus, aus den dann verbleibenden 4 Plätzen die drei für weiß, worauf der Rest (keine Wahl) rot wird:

$$P(E) = \underbrace{\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}}_{\text{Anzahl der Pfade}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} = 35 \cdot 4 \cdot \frac{27}{8^5} \approx 0{,}1154$$

F: Unter den ersten drei Feldern kommt jede Farbe genau einmal vor.

$$-\square - \square - \square - \text{bel} - \text{bel} - \text{bel} - \text{bel}$$

Auf den ersten drei Plätzen sind r, w und b in allen $3!$ Permutationen. Die Wahrscheinlichkeit, eine beliebige Farbe zu „erdrehen“ ist 1, denn es kommt ganz sicher irgendeine Farbe!

$$P(F) = 3! \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \cancel{\left(1^4\right)} = \tfrac{9}{64} \approx 0{,}1406$$

c) Wie oft muss man das Rad mindestens drehen, um mit mindestens 97 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Farbe Rot zu bekommen?

Es sei R die Anzahl der roten Felder bei n Drehungen. R ist binomial verteilt, n ist gesucht.

Bedingung: $P(R \geq 1) \geq 0{,}97$

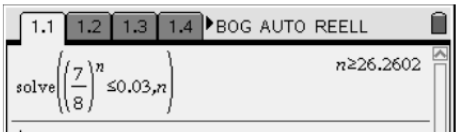
Über das Gegenereignis: $1 - P(R = 0) \geq 0{,}97$

Umformung: $-P(R = 0) \geq -0{,}03 \quad | \cdot (-1)$

$P(R = 0) \boxed{\leq} 0{,}03$

Andererseits ist: $P(R = 0) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^n$

Zusammen: $\left(\tfrac{7}{8}\right)^n \leq 0{,}03$



Manuell: Logarithmieren: $n \cdot \log\left(\tfrac{7}{8}\right) \leq \log 0{,}03 \quad | : \log\left(\tfrac{7}{8}\right) < 0$!

$$n \boxed{\geq} \frac{\log 0{,}03}{\log 7 - \log 8} \approx 26{,}26$$

(Achtung: bei Division durch eine negative Zahl ändert sich die Richtung der Ungleichung!. Außerdem ist $\lg \frac{7}{8} = \lg 7 - \lg 8$.)

Ergebnis: Man muss das Rad mindestens 27-mal drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens ein rotes Feld zu bekommen.

d) Fünf Sektoren des Glücksrades werden mit der Zahl 1 beschriftet, die restlichen mit der Zahl 2. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse (wobei wir davon ausgehen, dass die Ereignisse – trägt Farbe bzw. trägt Zahl stochastisch unabhängig sind):

G: Bei einer Drehung erhält man ein blaues Feld mit der Zahl 1.
H: Bei einer Drehung erhält man ein Feld, das weiß ist <u>oder</u> die 2 trägt.
I: Bei einer Drehung erhält man einen Sektor, der weder weiß ist, noch die Zahl 1 zeigt.

Unter der Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit folgt:

$$P(G)=P(b\cap 1)=p_b\cdot p_1=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}=\tfrac{5}{16}\approx 0{,}3125$$

$$P(H)=P(w\cup 2)=p_w+p_2-P(w\cap 2)=p_w+p_2-p_w\cdot p_2=\tfrac{3}{8}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{3}{8}$$

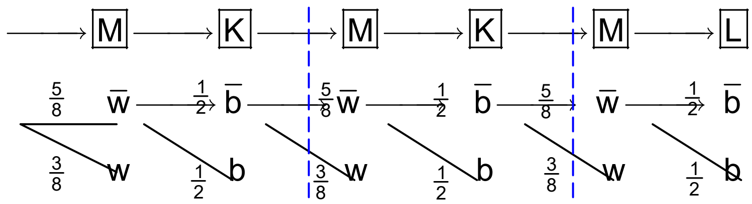
$$=\tfrac{24+24-9}{64}=\tfrac{39}{64}\approx 0{,}6094$$

$$P(I)=1-P(1\cup r)=1-(p_1+p_r-p_1\cdot p_r)=1-\tfrac{5}{8}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{8}=\tfrac{64-40-8+5}{64}=\tfrac{21}{64}$$

oder so: $P(I)=P(\overline{1}\cap\overline{r})=p_{\overline{1}}\cdot p_{\overline{r}}=\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{7}{8}=\tfrac{21}{64}\approx 0{,}3281$!!!

e) Kuno und Melisande führen mit diesem Rad ein Spiel durch. Sie drehen das Rad abwechselnd, wobei Melisande beginnen darf.
Die Spielregel lautet: Melisande gewinnt, wenn sie ein weißes Feld erhält, Kuno gewinnt mit blau. Es werden maximal drei Runden gespielt, hat einer vorher gewonnen, endet das Spiel.
Berechne die Gewinnchancen für beide.
Wie ändern sich die Gewinnchancen bei beliebig vielen Spielrunden?

Das Spiel entspricht folgendem Baumdiagramm:



$$P(\text{M gewinnt})=\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}+\left(\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\tfrac{3}{8}=\boxed{\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{16}\cdot\tfrac{3}{8}+\left(\tfrac{5}{16}\right)^2\cdot\tfrac{3}{8}}$$

Schüler der Oberstufe können hier die Formel der <u>geometrischen Reihe</u> anwenden:.

$$s_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\quad\text{mit } a_1=\tfrac{3}{8}\text{ und } q=\tfrac{5}{12}:$$

$$P(\text{M gewinnt})=\tfrac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{16}\right)^3}{1-\frac{5}{16}}=\tfrac{3}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{16}\right)^3}{\frac{9}{16}}=\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{16}{5}\cdot\left(1-\left(\tfrac{5}{16}\right)^3\right)\approx 0{,}5288$$

$$P(\text{Unentschieden})=\left(\tfrac{5}{16}\right)^3\approx 0{,}0305$$

$$P(\text{K gewinnt})=1-0{,}5288-0{,}0305\approx 0{,}4407\,.$$

<u>Bei unendlichem Spiel fällt Unentschieden weg</u>, weil dann sicher einer gewinnt.

Dann benötigt man die Formel für die unendliche geometrische Reihe: $s=\dfrac{a_1}{1-q}$

$$P(\text{M gewinnt})=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{5}{16}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{11}{16}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{11}=\frac{6}{11}\approx 0{,}5455$$

$$P(\text{K gewinnt})=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}\approx 0{,}4545\,.$$

Lösung 7.56

Eine Urne enthält 2 rote, 3 weiße und 5 schwarze Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln **mit einem Griff** entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X = Zahl der weißen Kugeln. Stelle sie als Histogramm dar.

Es sei X die Anzahl der weißen Kugeln, davon gibt es 3, also noch 7 nicht weiße.

WISSEN: Beim Ziehen ohne Zurücklegen verwendet man die **Hypergeometrische Verteilung**:

Es sei X die Zahl der weißen Kugeln. Dann gilt bei dieser Verteilung:

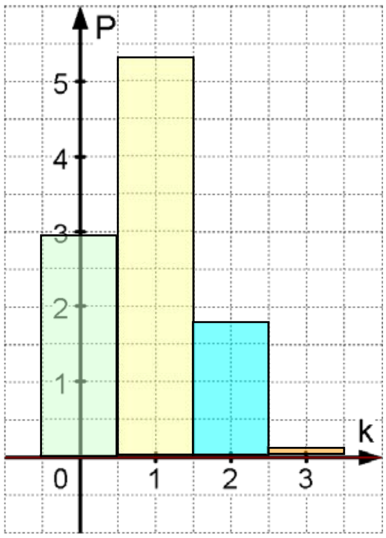
$$P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}} \quad \text{für} \quad k\in\{0;1;2;3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{35}{120}\approx 0{,}2917$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 21}{120}=\frac{63}{120}=0{,}525$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 7}{120}=\frac{21}{120}=0{,}175$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{120}=\frac{1}{120}=0{,}0083$$



Das Histogramm zeigt diese Wahrscheinlichkeitsverteilung .Die Maßeinheit auf der P-Achse bedeutet: 1 cm entspricht 0,1

b) Nun werden 6 Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.

Grundwahrscheinlichkeiten: $p_w=\frac{3}{10}=0{,}3$, $p_s=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ und $p_r=\frac{2}{10}=0{,}2$

A: Es werden nur schwarze Kugeln gezogen: $P(A)=0{,}5^6=0{,}0156$

B: Es wird genau eine weiße Kugel gezogen: $P(B)=6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^5=0{,}3025$

denn für die eine weiße gibt es 6 Plätze zur Wahl.

C: Es werden genau 3 rote Kugeln gezogen: Dazu verwendet man die Binomialverteilung:

$$P(C)=\binom{6}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}\cdot 1{,}6^3=20\cdot 1{,}6^3\approx 0{,}0819$$

D: Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen:

Man verwendet das Gegenereignis „keine weiße, also 6 nicht-weiße ($p_{nw}=0{,}7$):

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0{,}7^6\approx 0{,}8824$$

E: Es werden höchstens 4 schwarze Kugeln gezogen:

„Höchstens 4 schwarze Kugeln“ bedeutet 0 bis 4 schwarze Kugeln.

Für eine manuelle Berechnung kann man das Gegenereignis $\overline{E}$ (mindestens 5 schwarze Kugeln, also 5 oder 6) verwenden. Das ist weniger Rechenaufwand:

$P(E) = 1 - P(S=5) - P(S=6)$ wobei S die Zahl der schwarzen Kugeln bedeuten soll.

Es folgt binomial verteilt

$P(S=5) = 6 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 0{,}5^6$ und $P(S=6) = 0{,}5^6$ also $P(E) = 1 - 7 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}8906$.

Schneller geht es mit der Verteilungsfunktion: $P(E) = F_B(4;6;0{,}5) \approx 0{,}8906$

F: Man zieht abwechseln schwarz und weiß

Zu F gibt es genau zwei Pfade: $\begin{cases} w - s - w - s - w - s \\ s - w - s - w - s - w \end{cases}$

Auf beiden stehen je 3-mal w und je 3-mal s: $P(F) = 2 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}3^3 = 2 \cdot 1{,}5^3 \approx 0{,}00675$

G: Nur die ersten zwei Kugeln sind schwarz, dann folgt noch genau eine rote Kugel.

Bei G sind die ersten zwei Ziehungen wahlfrei, erst unter den letzten vier Kugeln gibt es die Wahl 1 rote und 3 nichtrote: $P(G) = 0{,}5^2 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}3^3 = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}027 \approx 0{,}0054$

H: Von jeder Farbe werden genau 2 Kugeln gezogen.

Zuerst wählen wir die Ziehungsplätze für die zwei roten Kugeln, diese können auf $\binom{6}{2} = 15$ Arten platziert werden. Dann wählen wir auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten die beiden Plätze für die weißen aus. Die restlichen werden mit blau besetzt. So ergibt dies $15 \cdot 6 = 90$ Pfade.

Dies kann man auch anders berechnen: 6 Kugeln kann man auf 6! Arten permutieren.

Da aber je zwei identisch sind, reduziert sich dies auf $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$ Arten.

Jeder Pfad ist also mit 2 roten, zwei weißen und 2 blauen Kugeln belegt und hat daher die Wahrscheinlichkeit: $0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^2 = (0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5)^2 = 0{,}03^2 = 0{,}0009$

Für das Ereignis H, das 90 solche Pfade aufweist, folgt dann:

$$P(H) = 90 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^2 = 90 \cdot 0{,}0009 = 0{,}081$$

I: Es werden gleich viele rote und weiße Kugeln gezogen:

Dies beinhaltet folgende Möglichkeiten:

3 rote und 3 weiße, oder 2 rote und 2 weiße und dann noch 2 schwarze,

oder 1 rote und 1 weiße und dann 4 schwarze, oder nur 6 schwarze:

$$P(I) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}3^3 + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5^4 + 0{,}5^6$$

$$P(I) = 20 \cdot 0{,}06^3 + 15 \cdot 6 \cdot 0{,}030^2 + 30 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5^4 + 0{,}5^6 = 0{,}2811$$

c) Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen?

Es sei R die Zahl der roten Kugeln. R ist binomial verteilt mit p = 0,2.

Gesucht ist n, die Zahl der Ziehungen.

Bedingung:	$P(X \geq 1) \geq 0{,}98$
d. h.	$1 - P(X = 0) \geq 0{,}98$
d. h.	$P(X = 0) \leq 0{,}02$
Wegen	$P(X = 0) = 0{,}8^n$
folgt:	$0{,}8^n \leq 0{,}02$

Bei ***manueller Lösung*** (also mit einfachem TR)

Logarithmieren: $n \cdot \log 0{,}8 \leq \log 0{,}02 \quad | : \log 0{,}8 < 0$

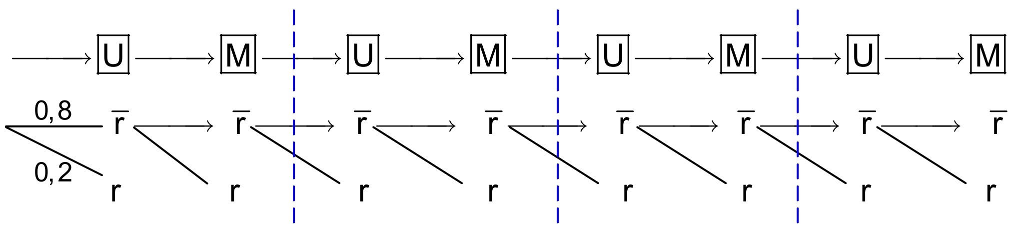
$$n \boxed{\geq} \frac{\log 0{,}02}{\log 0{,}8} \approx 17{,}5$$

Ergebnis: Man muss mindestens 18-mal ziehen, um mit mindestens 98 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen.

d) Uli und Mertel ziehen abwechselnd eine Kugel und legen sie dann wieder zurück. Uli beginnt. Wer rot zieht, hat gewonnen, dann endet dieses <u>1. Spiel</u>, das über maximal 4 Runden geht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Uli bzw. Merten? Wie lautet dieses Ergebnis bei beliebig langem Spiel?

Ein 2. Spiel verläuft so, dass die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird. Es endet auf natürliche Weise. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Uli bzw. Merten jetzt ?

<u>Das 1. Spiel</u> entspricht folgendem Baumdiagramm:



P(Uli gewinnt) = $0{,}2 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}4623$

Hier kann man in der Oberstufe die Formel für geometrische Reihen anwenden mit a_1 = 0,2 und q = 0,64 mit n = 4 und erhält:

$$\boxed{s_4 = a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q}} = 0{,}2 \cdot \frac{1-0{,}64^4}{1-0{,}64} = 0{,}2 \cdot \frac{1-0{,}64^4}{0{,}46} \approx 0{,}4623$$

P(Unentschieden) = $0{,}8^8 \approx 0{,}1678$

P(Merten gewinnt) = 1 – 0,4623 = 0,5377.

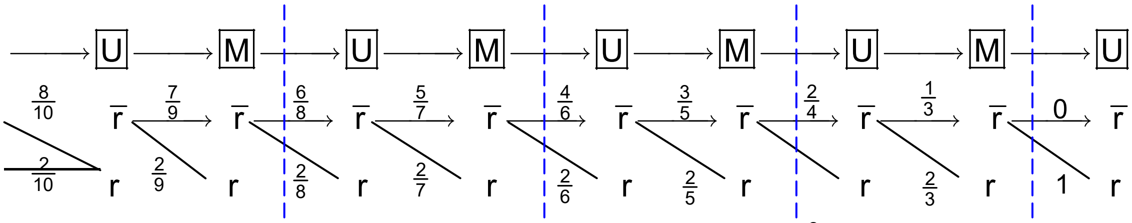
<u>Bei unendlichem Spiel</u> liegt eine ***unendliche geometrische Reihe*** vor mit

$$P(\text{Uli gewinnt}) = \boxed{\frac{a_1}{1-q}} = \frac{0,2}{1-0,64} = \frac{0,2}{0,36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,5556$$

Da es bei unendlichem Spiel stets einen Gewinner gibt, fällt ein unentschiedener Ausgang weg, also ist der Gewinn von Merten das Gegenereignis:

$$P(\text{Merten gewinnt}) = 1 - \tfrac{5}{9} = \tfrac{4}{9} \approx 0,4444\,.$$

<u>Das 2. Spiel</u> entspricht folgendem Baumdiagramm:



Wenn nicht zurückgelegt wird, reduziert sich bei jedem Nicht-Gewinnzug die Zahl der Kugel, wodurch sich die Wahrscheinlichkeiten wie gezeigt verändern. Bis am Ende nur noch Uli gewinnen kann (muss), weil nach der 8. nicht roten Kugel nur noch die beiden roten für Uli zur Verfügung stehen.

$$P(\text{U gewinnt}) = \tfrac{2}{10} + \tfrac{\cancel{8}}{10}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{2}{\cancel{8}} + \tfrac{\cancel{8}}{10}\cdot\tfrac{\cancel{7}}{9}\cdot\tfrac{\cancel{6}}{\cancel{8}}\cdot\tfrac{5}{\cancel{7}}\cdot\tfrac{2}{\cancel{6}} + \tfrac{\cancel{8}}{10}\cdot\tfrac{\cancel{7}}{9}\cdot\tfrac{\cancel{6}}{\cancel{8}}\cdot\tfrac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\tfrac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\tfrac{3}{\cancel{5}}\cdot\tfrac{2}{\cancel{4}} + \tfrac{\cancel{8}}{10}\cdot\tfrac{\cancel{7}}{9}\cdot\tfrac{\cancel{6}}{\cancel{8}}\cdot\tfrac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\tfrac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\tfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\tfrac{2}{\cancel{4}}\cdot\tfrac{1}{\cancel{3}}\cdot 1$$

$$= \tfrac{2}{10} + \tfrac{14}{90} + \tfrac{10}{90} + \tfrac{6}{90} + \tfrac{2}{90} = \tfrac{18+14+10+6+2}{90} = \tfrac{50}{90} = \tfrac{5}{9} \approx 0,5556$$

Da es kein Unentschieden gibt, folgt für Melisande diese Gewinn-Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{M gewinnt}) = 1 - \tfrac{5}{9} = \tfrac{4}{9} \approx 0,4444$$

e) 4 beliebige dieser 10 Kugeln tragen den Buchstaben A (stochastisch unabhängig) von ihren Farben. Man entnimmt zufällig eine dieser Kugeln.

Grundwahrscheinlichkeiten:	$p_s = 0,5$	(schwarz)
	$p_r = 0,2$	(rot)
	$P_w = 0,3$	(weiß)
	$p_A = 0,4$	(trägt A)

Setzen wir stochastisch unabhängige Ereignisse voraus, folgt:

(1) Die Kugel ist schwarz und trägt ein A:

$$P(s \cap A) = p_s \cdot p_A = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20$$

(2) Die Kugel ist weiß oder trägt ein A:

$$P(w \cup A) = p_w + p_A - p_w \cdot p_A = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$$

(3) Die Kugel ist rot und trägt kein A.

$$P(r \cap \overline{A}) = p_r \cdot p_{\overline{A}} = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$$

(4) Die Kugel ist weder rot noch trägt sie ein A.

$$P(\text{weder r noch A}) = 1 - P(r \cup A) = 1 - (p_r + p_A - p_r \cdot p_A)$$

$$= 1 - 0{,}2 - 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$$

oder $P(\text{weder r noch A}) = P(\overline{r} \cap \overline{A}) = p_{\overline{r}} \cdot p_{\overline{A}} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$

	s	w	r	
	1	3	5	A
	2	4	6	$\overline{A}$

(5) Die Kugel ist rot oder weiß und trägt ein A.

Zur Verdeutlichen wird ein 6-Felder-Diagramm verwendet.
Hier liegen die Felder 3 und 5 vor:

$$P((r \cup w) \cap A) = P(r \cup w) \cdot p_A = (p_r + p_w - \cancel{p_r \cdot p_w}) \cdot p_A$$

$= (0{,}2 + 0{,}3) \cdot 0{,}4 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}20$ Die Schnittmenge $r \cap w$ ist leer !

oder: $= P(\text{"3"}) + P(\text{"5"}) = P(w \cap A) + P(r \cap A) = p_W \cdot p_A + p_r \cdot p_A$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}20$$

(6) Die Kugel ist weiß und trägt kein A <u>oder</u> sie ist nicht rot und trägt ein A.

Weiß und kein A: $P(w \cap \overline{A}) = p_w \cdot p_{\overline{A}} = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

Nicht rot und A: $P(\overline{r} \cap A) = p_{\overline{r}} \cdot p_A = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

$$\underbrace{P(w \cap \overline{A})}_{\text{Feld 4}} \cup \underbrace{P(\overline{r} \cap A)}_{\text{Felder 1, 3}} = 0{,}18 + 0{,}32 - \underbrace{\cancel{0{,}18 \cdot 0{,}32}} = 0{,}50,$$

denn die Schnittmenge dieser Felder ist leer.

Lösung 7.57

Bei der Produktion von Schaltern entsteht einer Firma 10% Schrott. Man prüft daher 20 Schalter.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

A: alle Schalter brauchbar?

B: mindestens 15 Schalter intakt?

C: Höchstens 2 Schalter defekt?

Man kann mit zwei Zufallsvariablen rechnen (für defekt und gut), oder auch mit einer, etwa:
X sei die Anzahl der brauchbaren Schalter. X ist binomial verteilt mit p = 0,9.

$P(A) = 0{,}9^{20} \approx 0{,}1216 \approx 12\%$

$P(B) = P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - F_B(14;20;0{,}9) \approx 0{,}9887 \approx 99\%$

$P(C) = P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) = 1 - F_B(17;20;0{,}9) \approx 0{,}8670 \approx 87\%$.

Denn „höchstens 2 Schalter sind defekt" bedeutet 0, 1 oder 2 defekte Schalter.
Sind es 2 defekte, dann sind es 18 gute, in den anderen Fällen mehr. Also kann man auch sagen: „Mindestens 18 gute Schalter".

b) Mit wie vielen defekten Schaltern muss man unter 100 rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der defekten Schalter davon um höchstens 1 ab? In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Stückbereich erhält man 60% bzw. 99% der defekten Schalter?

b) Gesucht ist jetzt der Erwartungswert für die Zahl der defekten (wofür wir jetzt Y sagen):

$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Abweichung um 1 davon bedeutet $9 \leq Y \leq 11$.

$P(9 \leq Y \leq 11) = F_B(11;100;0{,}1) - F_B(8;100;0{,}1) \approx 0{,}3822 \approx 38\%$

Es sei jetzt r der Radius des zu E = 10 symmetrischen Intervalls, das man durch diese Ungleichung beschreiben kann: $10 - x \leq Y \leq 10 + x$ mit $x \in \{0,1,...,10\}$.

Dann benötigt man jetzt die Werte dieser Funktion (nennen wir sie etwa d):

$d(x) = P(10 - x \leq X \leq 10 + x) = F_B(10 + x;100;0{,}1) - F_B(9 - x;100;0{,}1)$.

Mit CAS-Rechnern findet man:

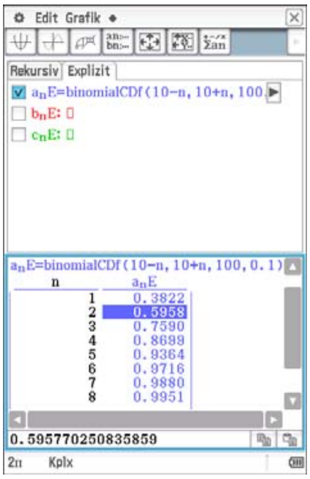
Für x = 2, also $8 \leq Y \leq 12$ gilt:

$d(2) = P(8 \leq Y \leq 12) \approx 0{,}59577 \approx 60\%$

Für x = 7, also $3 \leq Y \leq 17$ gilt:

$d(7) = P(3 \leq Y \leq 17) \approx 0{,}9890 \approx 99\%$

Rechts eine Spezialmethode mit Folgen (CASIO ClassPad)



Lösung 7.58 („Große“ 3-mal-mindestens-Aufgabe; Sigma-Umgebungen)

a) Eine Glühlampe ist zu 95% Wahrscheinlichkeit in Ordnung.
Wie viele müsste man mindestens kaufen, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 15 gute Glühbirnen zu bekommen?

<u>Vorarbeit:</u> Gegeben ist $g_{gut} = 0{,}95$.

Gesucht: n (umfang der Stichprobe).

Zufallsvariable: X = Anzahl der guten Glühbirnen. X ist binomial verteilt.

Zielereignis: $X \geq 15$

<u>Bedingung</u> für das Ereignis: $\boxed{P(X \geq 15) \geq 0{,}9}$

Umformung: $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14)$

Neue Bedingung daher: $1 - P(X \geq 14) \geq 0{,}9 \mid -1$

Umformung: $-P(X \geq 14) \geq -0{,}1 \mid \cdot(-1)$

$P(X \geq 14) \leq 0{,}1$

d. h. $\boxed{F_B(14\,;n\,;0{,}95) \leq 0{,}5}$

Wissen: Multipliziert man eine Ungleichung mit -1, dann kehrt sich ihre Richtung um.

<u>Lösung der Aufgabe:</u>

Jetzt muss man entweder in einer Funktionentafel so lange suchen, bis man zu einem passenden aber möglichst kleinen n diese Ungleichung erfüllt sieht.
Oder man lässt sich von einem Rechner eine Liste von Werten berechnen, so dass man daraus das gesuchte kleinste n ablesen kann.

Hier drei Werte:

$F_B(14;18;0{,}95) = 0{,}0109 < 0{,}1$

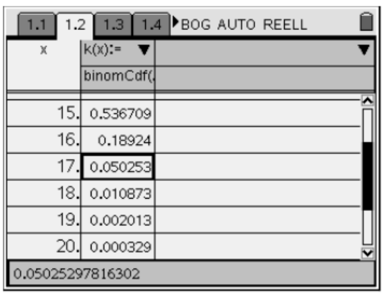
$F_B(14;17;0{,}95) = 0{,}0503 < 0{,}1$

$F_B(14;16;0{,}95) = 0{,}1892 > 0{,}1$

Man erkennt dann, dass n = 17 die kleinste passende Zahl ist. Also muss n mindestens 17 sein.

Ergebnis: Man muss mindestens 17 Glühbirnen kaufen, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 15 gute Glühbirnen zu bekommen.

TI Nspire:



b) Bei einem Werkstest werden der Produktion 200 Glühlampen entnommen und geprüft.
Berechne die drei bekannten Sigma-Umgebungen und interpretiere die Ergebnisse.

Gegeben ist:	n = 200
und	$p_{def} = 0{,}05$
Zufallsvariable:	X = Anzahl X defekten Glühlampen.

Erwartungswert:	$E = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}05 = 10$
Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{\underbrace{200 \cdot 0{,}05}_{=E=10} \cdot 0{,}95} = \sqrt{9{,}5} \approx 3{,}08 > 3$

Da $\sigma > 3$ ist, kann man die folgenden Aussagen mit guter Näherung auf die Binomialverteilung übernehmen:

Die $1\sigma-$Umgebung ist: $E - \sigma \le X \le E + \sigma$, d.h.
$7 \le X \le 13$
In ihr liegen laut Theorie etwa 67% der defekten Teile.

Die $2\sigma-$Umgebung ist: $E - 2\sigma \le X \le E + 2\sigma$, d.h.
$4 \le X \le 16$
In ihr liegen laut Theorie etwa 96% der defekten Teile.

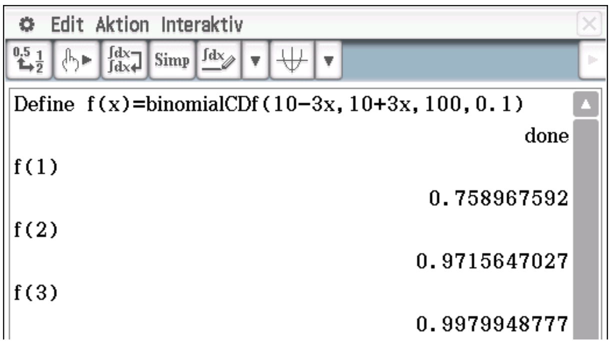
Die $3\sigma-$Umgebung ist: $E - 3\sigma \le X \le E + 3\sigma$, d.h.
$1 \le X \le 19$
In ihr liegen laut Theorie etwa 99% der defekten Teile.

Hier eine Erzeugung der drei Sigma-Intervalle mit CASIO ClassPad.

Wegen $\sigma = 3$ wurde der Radius "3x" verwendet.
Die $3\sigma-$Umgebung lautet dann beispielsweise so: $10 - 3x \le X \le 10 + 3x$.
Die berechneten Werte sind exakt, die oben genannten entstammen der Theorie der Normalverteilung. (Der Screen ist softwaremäßig verbreitert worden!)

Man findet dass für x = 3 die Wahrscheinlichkeit 99,7% ist. Also lautet das Intervall:

$E - 3\sigma \le X \le E + 3\sigma$, d.h. $1 \le X \le 19$
In ihr liegen laut Theorie etwa 99% der defekten Teile.



Lösung 7,59

1% der Bevölkerung scheint telepathische Fähigkeiten zu besitzen. Wie viele Leute muss man zu einem Test einladen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einen dieser Begabten nachweisen zu können?
Wie viele sollten es sein, damit man mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens 3 solche findet?
Zeige zuerst, dass die Anzahl zwischen 500 und 700 liegen muss. Schränke dann weiter ein.

a) Die Wahrscheinlichkeit ist p = 0,01, und n ist gesucht.
Es sei X die Zahl der Personen mit telepathischen Fähigkeiten.

Bedingung: $P(X \geq 1) = 0{,}95$

Arbeit mit dem Gegenereignis: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

Zusammengefasst: $1 - P(X = 0) = 9{,}95 \quad | -1$

Umformung: $-P(X = 0) = -0{,}05$

$P(X = 0) = 0{,}05$

Weiterhin gilt: $P(X = 0) = 0{,}99^n$

Zusammengefasst: $0{,}99^n = 0{,}05$

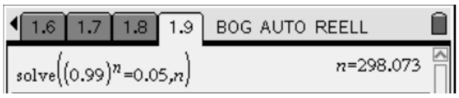
1. Lösung (manuell mit einfachem Taschenrechner):

Logarithmieren: $\log 0{,}99^n = \log 0{,}05$

3. Logarithmengesetz: $n \cdot \log 0{,}99 = \log 0{,}05$

Umstellen: $n = \dfrac{\log 0{,}05}{\log 0.99} \approx 298{,}07$

2. Lösung mit CAS-Rechner:



Ergebnis: Man muss mindestens 299 Personen zum Test einladen, damit man mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einen mit telepathischen Fähigkeiten bei sich hat.

b) Jetzt lautet die Bedingung: $P(X \geq 3) = 0{,}95$

bzw.: $1 - P(X \leq 2) = 0{,}95$

$P(X \leq 2) = 0{,}05$

Mit der Verteilungsfunktion: $F_B(2;n;0{,}99) = 0{,}05$

Da die linke Seite im Gegensatz zum Aufgabenteil a) jetzt ein komplizierter Term ist, den man nicht so einfach mit logarithmieren berechnen kann, muss man diese Aufgabe über einen CAS-Rechner lösen lassen. Dazu stellt man eine Wertetafel für diese Funktion $F_B(2;n;0{,}99)$ auf, die n zur Variablen hat.

Da vermutlich selbst CAS-Rechner dies nicht in einem Rutsch erledigen können (weil man sie vermutlich noch nicht dazu programmiert hat), muss man eben so lange Werte berechnen lassen, bis man das Ziel erreicht hat.

Zu Beginn einige Testwerte, damit man sieht, wo man systematisch suchen muss:

Das Ergebnis sind 627 Personen.

Hier meine Berechnungstabellen mit TI Nspire und mit CASIO ClassPad.

$F_B(2;500;0,99) > 0,05$

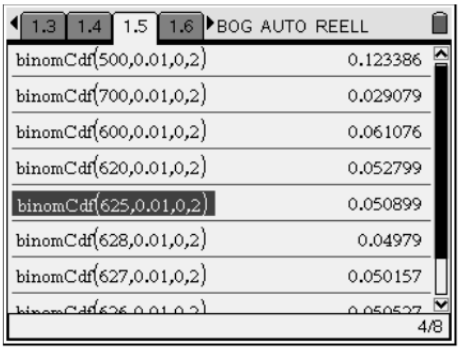
$F_B(2;700;0,99) < 0,05$

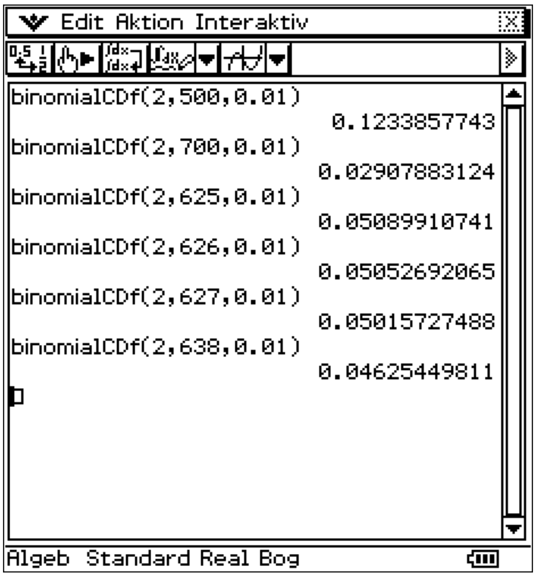
$F_B(2;625;0,99) \approx 0,0509 > 0,05$

$F_B(2;626;0,99) \approx 0,0504 > 0,05$

$F_B(2;627;0,99) \approx 0,0502 > 0,05$

$F_B(2;628;0,99) \approx 0,04979 < 0,05$





Lösung 7.60

Drei ideale Würfel werden geworfen.
Als Treffer gilt ein Dreierpasch (also drei gleiche Augenzahlen).
Es wird 144-mal geworfen.

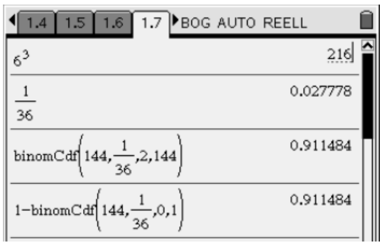
a) Mit wie vielen Treffern kann man rechnen? Wie groß ist die Standardabweichung?

Mit 3 Würfen gibt es $m = 6^3 = 216$ verschiedene Ergebnisse.

Darunter sind g = 6 Dreierpasch. Daraus erhält man die Wahrscheinlichkeit für einen Dreierpasch:

$$p_{DP} = \frac{g}{m} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 .$$

X sei die Zufallsvariable „Anzahl der Dreierpasch“. X ist binomial verteilt mit $p = \frac{1}{36}$.



<u>Erwartungswert</u> für X: $E(X) = n \cdot p = 144 \cdot \frac{1}{36} = 4$.

Man kann also durchschnittlich mit 4 Dreierpasch rechnen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man mehr als einen Treffer?

$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = F_B\left(1;144;\frac{1}{36}\right) = 0{,}9115$

c) Wie oft müsste man mindestens werfen, um mit 80% Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Treffer zu bekommen?

Bedingung: $P(X \ge 5) \ge 0{,}8$

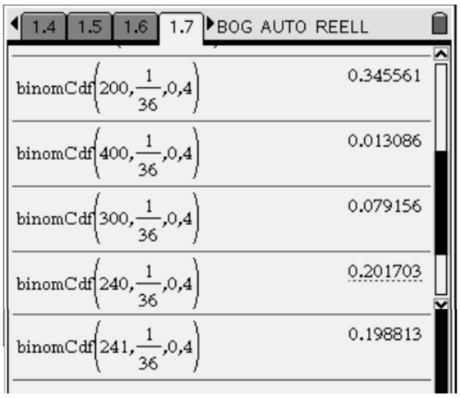
Umformung: $1 - P(X \le 4) \ge 0{,}8$

$P(X \le 4) \le 0{,}2$

$F_B(4;n;\frac{1}{36}) \le 0{,}2$ (*)

Man berechnet mit einem geeigneten Rechner verschiede Werte und sucht den kleinsten Wert für n heraus, der die Bedingung (*) erfüllt.

Die entscheidenden Werte sind:



$F_B\left(4;240;\frac{1}{36}\right) \approx 0{,}2017$ und $F_B\left(4;241;\frac{1}{36}\right) \approx 0{,}1988$

Für alle n kleiner als 241 ist die Wahrscheinlichkeit größer als 0,2. E s gilt somit:

Ergebnis: Man muss mindestens 241-mal würfeln, um mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Dreierpasch zu bekommen.

Lösung 124

a) Eine ideale Münze wird dreimal nacheinander geworfen. Die beiden Seiten der Münze seien W (Wappen) und Z (Zahl).
Gib den Ergebnisraum S des Experiments an.

3-mal Werfen einer Münze ergibt diesen Ergebnisraum:

$S = \{ZZZ, WZZ, ZWZ, ZZW, ZWW, WZW, WWZ, WWW\}$

Hinter so einer Aufzählung sollte ein System stecken. Ich habe mit dreimal Z begonnen: ZZZ. Dann drei Tripel mit zweimal Z. Das jeweils dazugehörende W steht zuerst vorne, dann in der Mitte, und dann am Ende des Tripels. Dann folgen die drei Tripel, welche nur 1 Z, also zweimal W enthalten. Das eine Z steht dabei zuerst vorne, dann in der Mitten dann am Ende.'
Schließlich das Tripel ohne Z, also WWW.

b) X sei die „Anzahl von Z" bei 64 Würfen.
Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

A: genau 32-mal Zahl?
B: höchstes 20-mal Zahl?
C: mindestens 10-mal Wappen?
D: zwischen 20 und 40-mal Zahl?

Es wird 64-mal geworfen. Es ist $p_Z = p_W = \frac{1}{2}$.

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{64 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

A: genau 32-mal Zahl?

$$P(A) = \binom{64}{32} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{32} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{32} = \binom{64}{32} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{64} = f_B\left(32; 64; \tfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}0993 \approx 0{,}1$$

B: höchstes 20-mal Zahl?

$$P(B) = P(X \leq 20) = F_B\left(20; 64; \tfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}001845$$

C: mindestens 10-mal Wappen?

$$P(C) = P(Y \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_B\left(9; 64; \tfrac{1}{2}\right) \approx 1$$

Y war die Anzahl der Wappen. Man bekommt fast sicher mindestens 10-mal Wappen.

D: zwischen 20 und 40-mal Zahl?

$$P(D) = P(20 < X < 40) = P(21 \leq X \leq 39) = F_B\left(49; 64; \tfrac{1}{2}\right) - F_B\left(20; 64; \tfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}0682$$

c) Jetzt wird genau 10-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit zu

E: Genau 5-mal nacheinander Zahl, sonst nur Wappen.

F: Abwechslungsweise Wappen und Zahl.

G: Zuerst genau drei Zahl und dann am Ende noch einmal.

E: Genau 5-mal nacheinander Zahl, sonst nur Wappen.

Das ist genau ein Pfad mit dieser Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} = \tfrac{1}{1024} \approx 0{,}001 = 0{,}1\%$$

F: Abwechslungsweise Wappen und Zahl.

Es gibt genau 2 Pfade dazu: Einer beginnt mit Z, ein anderer mit W.

$$P(F) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 = \tfrac{1}{512} \approx 0{,}002$$

G: Zuerst genau drei Zahl und dann am Ende noch einmal.

Hierzu ein Sammelpfad, der alle 4 Pfade darstellt, die möglich sind:

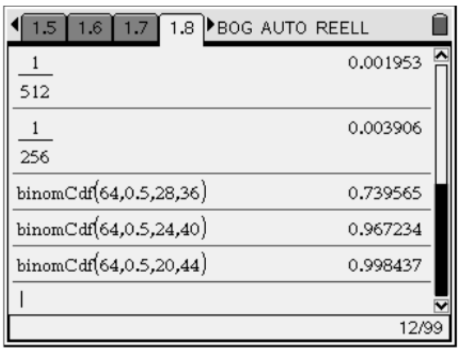
- Z - Z - Z - W - X - X - W - Z - Z - Z

Erklärung: Wenn am Anfang genau dreimal Z stehen soll, muss der 4. Wert W sein. Analoges gilt von hinten her. Damit liegen 8 der 10 Plätze fest. Die beiden mittleren können beliebige besetzt werden, also mit Z oder W. Dazu gibt es wieder genau 4 Möglichkeiten: ZZ, ZW, WZ, WW.

Für das beliebige Zeichen X gilt die Wahrscheinlichkeit 1. Also folgt für das Ereignis G:

$$P(G) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \tfrac{1}{256} \approx 0{,}0039\,.$$

d) Was sagen die 3 Sigma-Intervalle zu b) aus? Gib sie an.



Lösung

d) **Drei Sigma-Intervalle.**

Dazu braucht man aus b) E = 32 und $\sigma = 4$.

Die $1\sigma-$Umgebung ist: $E - \sigma \le X \le E + \sigma$, d. h.

$28 \le X \le 36$

In ihr liegen laut Theorie etwa 67% der defekten Teile.

Die $2\sigma-$Umgebung ist: $E - 2\sigma \le X \le E + 2\sigma$, d. h.

$24 \le X \le 40$

In ihr liegen laut Theorie etwa 96% der defekten Teile.

Die $3\sigma-$Umgebung ist: $E - 3\sigma \le X \le E + 3\sigma$, d. h.

$20 \le X \le 44$

In ihr liegen laut Theorie etwa 99% der defekten Teile.

Lösung 7.62

Ein Glücksrad enthält zehn gleich große Sektoren, von denen 4 rot und 6 weiß gefärbt sind. Es sei X die Anzahl der roten Sektoren, die man bei 20 Drehungen erhält und Y die Zahl der weißen Sektoren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man …

Wir kennen also diese Grundwahrscheinlichkeiten: $p_r = 0,4$; $p_w = 0,6$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 13 rote Felder?

$$P(X = 13) = f_B(13;20;0,4) = 0,0146$$

b) … genau 12 weiße Felder?

$$P(Y = 12) = f_B(12;20;0,6) = 0,1797$$

c) … höchstens 8 weiße Felder?

$$P(Y \le 8) = F_B(8;20;0,6) = 1 - 0,9435 = 0,0565$$

d) … höchstens 17 weiße Felder?

$$P(Y \le 17) = F_B(17;20;0,6) = 1 - 0,0036 = 0,9974$$

e) … mindestens 11 rote Felder?

$$P(X \ge 11) = 1 - P(X \le 10) = 1 - F_B(10;20;0,4) = 1 - 0,8725 = 0,1275$$

f) … mindestens 16 rote Felder?

$$P(X \ge 16) = 1 - P(X \le 15) = 1 - F_B(15;20;0,4) = 1 - 0,9997 = 0,0003$$

g) … zwischen 10 und 13 weiße Felder?

$$P(10 < Y < 13) = P(11 \le Y \le 12) = F_B(12;20;0,6) - F_B(11;20;0,6)$$
$$= 0,5956 - 0,4159 = 0,1797$$

h) … zwischen 10 und 13 rote Felder?

$$P(10 < X < 13) = P(11 \le X \le 12) = F_B(12;20;0,4) - F_B(11;20;0,4)$$
$$= 0,9790 - 0,9435 = 0,0355$$

i) … mehr als 7 aber höchstens 10 rote Felder?

$$P(7 < X \le 10) = F_B(10;20;0,4) - F_B(7;20;0,4) = 0,8725 - 0,4159 = 0,4566$$

j) … mindestens 11 aber weniger als 16 weiße Felder?

$$P(11 \le Y < 16) = F_B(15;20;0,6) - F_B(10;20;0,6) = 0,7553 - 0,0510 = 0,7043$$

(2) **Erwartungswert:** $E(X) = 20 \cdot 0,4 = 8$

Bestimme das zu E(X) symmetrische Intervall, in dem mit mindestens 80 % Wahrscheinlichkeit die Felder rot sind.

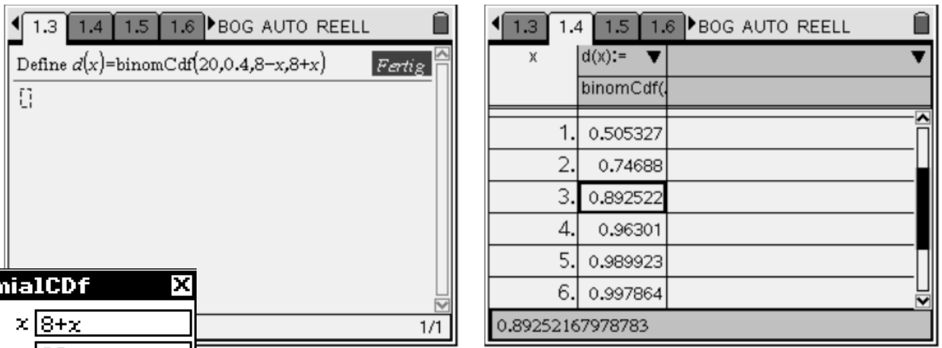
$$P(7 \le X \le 9) = F_B(9;20;0,4) - F_B(6;20;0,4) = 0,7553 - 0,2500 = 0,5053$$

$$P(6 \le X \le 10) = F_B(10;20;0,4) - F_B(5;20;0,4) = 0,8725 - 0,1256 = 0,7649$$

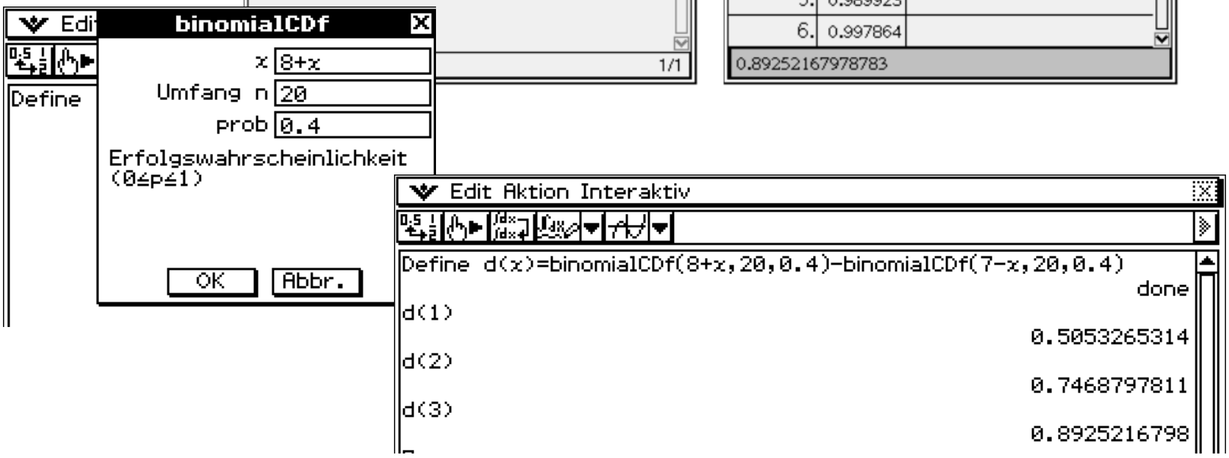
$$P(5 \le X \le 11) = F_B(11;20;0,4) - F_B(4;20;0,4) = 0,9435 - 0,0510 = 0,8925$$

<u>Ergebnis:</u> Im Intervall $6 \le X \le 10$ sind die Felder zu etwa 76 % rot,
im Intervall $5 \le X \le 11$ zu etwa 89 %.

TI Nspire:



CASIO ClassPad:



(3) Wie oft muss man mindestens drehen, um mit mindestens 40 % Wahrscheinlichkeit mindestens 8 rote Sektoren zu erhalten?

Bedingung: $P(X \ge 8) \ge 0,4$ d. h. $1 - P(X \le 7) \ge 0,4$

$P(X \le 7) \le 0,6$ d. h. $F_B(7\,;n\,;0,4) \le 0,6$

Ablesen aus der Tafel oder aus einem größeren Taschenrechner:

n=17: $F_B(7\,;17\,;0,4) = 0,6405 > 0,6$!!!

n=18: $F_B(7\,;18\,;0,4) = 0,5778 < 0,6$!!!

Mit jedem höheren n wird diese Wahrscheinlichkeit kleiner. Also lautet das

<u>Ergebnis</u>: Man muss mindestens 18-mal ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 40 % mindestens 8 rote Kugeln zu erhalten.

Lösung 7.63

In einem Behälter liegen blaue, weiße und rote Kugeln, wobei der Anteil der blauen Kugeln 20 % beträgt, der der weißen 10 %.

Aus diesem Karton werden rein zufällig Kugeln mit Zurücklegen entnommen.

a) Grundwahrscheinlichkeiten: $p_b = 0{,}2$, $p_w = 0{,}1$ $\Rightarrow$ $p_r = 0{,}7$.

Experiment: Ziehen von n = 15 Kugeln mit Zurücklegen:

A: Es werden nur blaue Kugeln entnommen.
$P(A) = 0{,}2^{15} = 3{,}277 \cdot 10^{-11} \approx 0$

B: Man erhält mindestens 5 weiße Kugeln.

W sei die Anzahl der weißen Kugeln. W ist binomial verteilt.

$P(B) = P(W \geq 5) = 1 - P(W \leq 4) = 1 - F_B(4;15;0{,}1) = 1 - 0{,}9873 = 0{,}0127$

C: Es werden höchstens 10 rote Kugeln gezogen.

R sei die Anzahl der roten Kugeln, R ist binomial verteilt:

$P(C) = P(R \leq 10) = F_B(10;15;0{,}7) = 1 - 0{,}5155 = 0{,}4845$

D: Jede zweite Kugel ist rot.

Wenn jede zweite Kugel rot ist, dann kann dies auf zwei Arten geschehen:

$$r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r$$
$$\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}-r-\overline{r}$$

Im 1. Pfad sind 8-mal r und 7-mal $\overline{r}$, im 2. Pfad 8-mal $\overline{r}$ und 7-mal r:

$$P(D) = 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^7 + 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^8 = 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^7 \cdot \underbrace{(0{,}7 + 0{,}3)}_{=1} = 0{,}21^7 \approx 0{,}000.018$$

E: Die 2. und 4. Kugel ist weiß, die letzten drei sind blau.

$$x-w-x-w-x-x-x-x-x-x-x-x-b-b-b$$

Dies ist unser Pfad, wobei x eine beliebige Kugel sein darf, deren Wahrscheinlichkeit ist 1. Es folgt also: $P(E) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}000.08$

b) Wie viele Kugeln muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 50 % Wahrscheinlichkeit mindestens 2 weiße zu ziehen?

Bedingung: $P(W \geq 2) \geq 0{,}5$, d. h. $1 - P(W \leq 1) \geq 0{,}5$

Dies ergibt: $P(W \leq 1) \leq 0{,}5$, d. h. $F_B(1\,;n\,;0{,}1) \leq 0{,}5$

n ist gesucht.

Aus einer Tabelle bzw. einem besseren Taschenrechner entnimmt man:

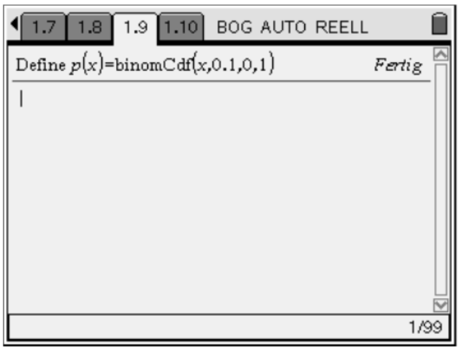
n = 16: $F_B(1;16\,;0{,}1) = 0{,}5147 > 0{,}1$

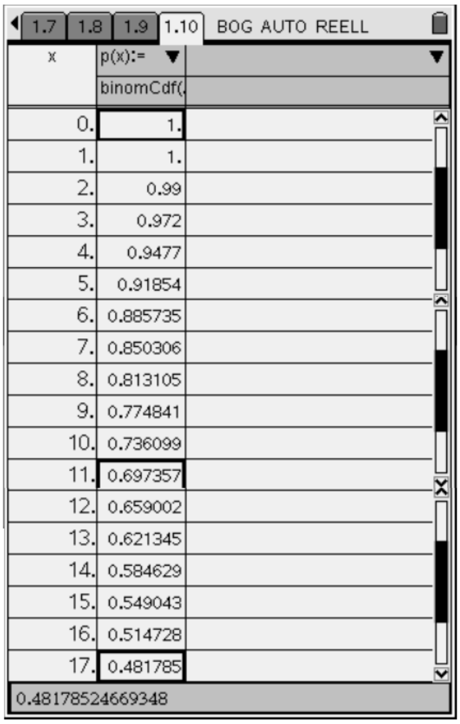
n = 17: $F_B(1;17\,;0{,}1) = 0{,}4818 < 0{,}1$

Da für höheres n die Wahrscheinlichkeit immer kleiner wird, folgt:

Ergebnis: Man muss mindestens 17 Kugeln entnehmen, um mit mindestens 50 % Wahrscheinlichkeit mindestens zwei weiße Kugeln zu erhalten.

Hierzu die Lösung mit TI Nspire CAS:





Man definiert eine Funktion, bei der x der Umfang der Stichprobe ist und lässt sich über ein Spreadsheet eine Funktionstabelle ausgeben.

Man erkennt dann: $F_B(1;17;0{,}1) = 0{,}4818 < 0{,}1$

Wie viele rote Kugeln kann man unter 100 Kugeln erwarten?

Der Erwartungswert für n = 100 für die Zufallsvariable R = Zahl der roten Kugeln ist

$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}7 = 70$

Bestimme das kleinste dazu symmetrische Intervall, in dem die roten Kugeln mit mindestens 80 % vorkommen.

Die Bedingung lautet: $P(70-k \le R \le 70+k) \ge 0{,}80$

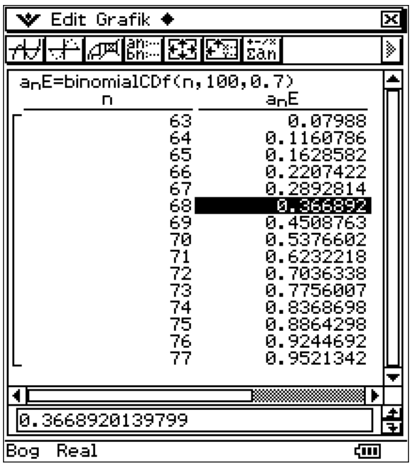
k=5 ergibt: $P(65 \le R \le 75) = F_B(75;100;0{,}7) - F_B(64;100;0{,}7)$

$= 0{,}8864 - 0{,}1161 = 0{,}7703 < 0{,}80$

k=6 ergibt

$P(64 \le R \le 76) = F_B(76;100;0{,}7) - F_B(63;100;0{,}7)$

$= 0{,}9245 - 0{,}0799 = 0{,}8446 > 0{,}80$



Wenn das Intervall den Radius mindestens 6 hat, dann enthält das Intervall auch mindestens 80 % der roten Kugeln.

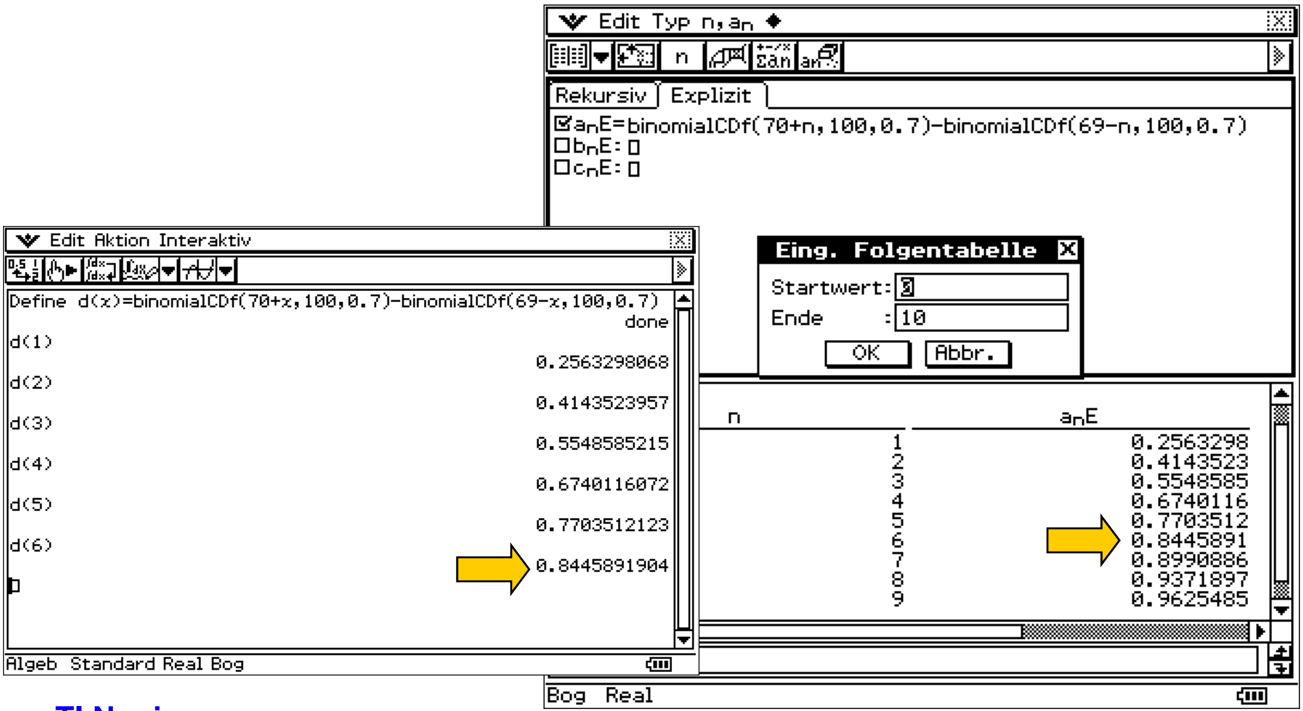
Wir schauen uns dazu auch CAS-Lösungen an.

Zunächst die Binomialverteilung bei **ClassPad:**

Hier kann man die Werte für die obige Berechnung entnehmen.

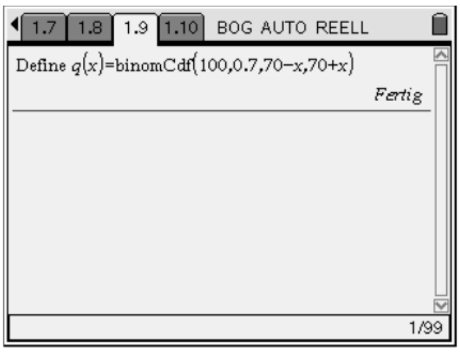
Es geht jedoch eleganter, indem wir gleich die Differenzen berechnen lassen. Zuerst wieder als Zahlenfolge mit **ClassPad:**

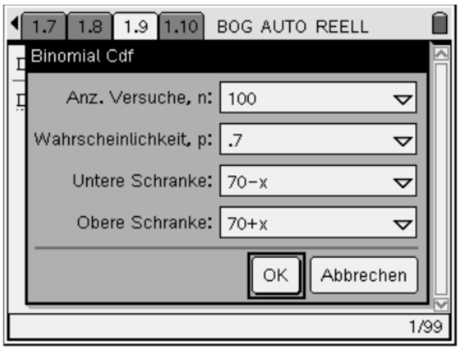
Und dann als „normal“definierte Funktion, die uns dann einige Werte berechnet:



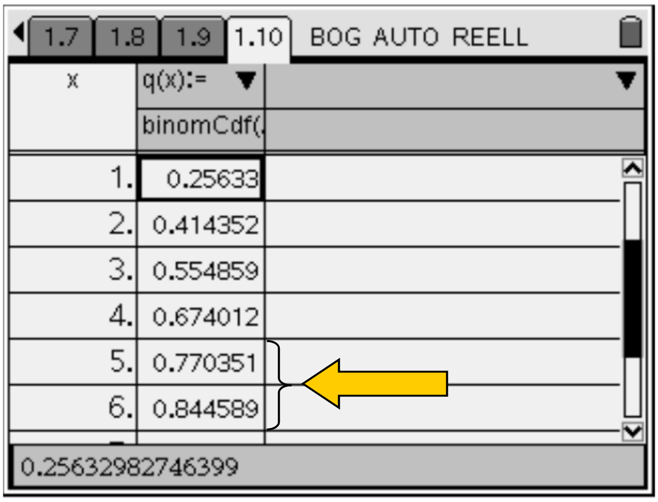
TI Nspire:

Die Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Differenzen sieht hier so aus:





Und das sind dann die berechneten Werte, aus denen wir uns das Ergebnis aussuchen.



c) Spielzeugpackungen enthalten 100 Kugeln dieser Zusammensetzung.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als 75 rote Kugeln in dieser Packung?
Und mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 3 genau solcher Kartons unter 20 Kartons?

$$P(R > 75) = 1 - P(R \le 75) = 1 - F_B(75;100;0,7) = 1 - (1 - 0,1136) = 0,1136$$

Es sei Z die Zahl der Kartons, die mehr als 75 rote Kugeln enthalten.
Gesucht ist $P(Z \le 3)$.

$$P(Z \le 3) = 0,8864^{20} + 20 \cdot 0,1136 \cdot 0,8864^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,1136^2 \cdot 0,8864^{18} +$$

$$+\binom{20}{3} \cdot 0,1136^3 \cdot 0,8864^{17} \approx 0,7347$$

Lösung 7.64

a) Zwei Drittel einer Jugendgruppe wohnt in der Stadt. Es werden zufällig Jugendliche ausgewählt. Wie viele muss man mindestens auswählen, um mit mindestens 96 % Wahrscheinlichkeit **mindestens 9** Stadtkinder zu bekommen?

Es sei X die Zahl der ausgewählten Stadtkinder. Ein Kind wohnt mit $p = \frac{2}{3}$ in der Stadt.

X ist binomialverteilt. Gesucht ist n, der Umfang der Stichprobe.

Bedingung: $P(X \geq 9) \geq 0,96$

ACHTUNG: Es gibt verschiedene Lösungsmethoden

Auf Grund der unterschiedlichen Parameterfestlegungen der verschiedenen Rechnertypen muss man sich genau informieren, was der Rechner kann, und wie man die Werte eingeben muss. Hier empfiehlt sich eine interaktive Eingabe. Ich zeige einige Beispiele:

(1) **TI Nspire:**

(a) Im Menü „Wahrscheinlichkeit", Untermenü „Verteilungen" findet man eine Liste von Funktionen. Zu $P(X \geq k)$ und $P(X \leq k)$ gehört →

D:Binomial Pdf
E:Binomial Cdf

Die Syntax dieser Funktion lautet: binomCdf(n,p,uGr,oGr),
Das heißt man berechnet damit $P(uGr \leq X \leq oGr)$

Man kann nun einfach durch Probieren die Zahlen n =18 und und n = 19 finden und erhält:

$\text{binomCdf}\left(18,\frac{2}{3},9,18\right)$	0.956652
$\text{binomCdf}\left(19,\frac{2}{3},9,19\right)$	0.975928

n = 18, k = 8 ergibt $P(X \geq 9) < 0,96$.

n = 19, k = 8 ergibt $P(X \geq 9) > 0,96$

Also ist 19 die kleinste Zahl, welche die Bedingung erfüllt.

(b) Ältere Versionen oder andere Rechnermodelle haben für diese Funktion die **feste untere Grenze 0** festgelegt und können somit nur $P(0 \leq X \leq k)$ berechnen. Dann muss man umrechnen auf das Gegenereignis $1 - P(X \leq 8) \geq 0,96$

Umformung: $P(X \leq 8) \leq 0,04$

Ähnlich ist es auch bei **Wahrscheinlichkeitstabellen**.

Für die Verteilungsfunktion gilt also: $F_B\left(8;n;\frac{2}{3}\right) \leq 0,04$

Man kann nun einfach durch Probieren die Zahlen n =18 und und n = 19 finden und erhält:

$\text{binomCdf}\left(18,\frac{2}{3},8\right)$	0.043348
$\text{binomCdf}\left(19,\frac{2}{3},8\right)$	0.024072

n = 18, k = 8 ergibt $P(X \leq 8) > 0,04$

n = 19, k = 8 ergibt $P(X \leq 8) < 0,04$

Also ist 19 die kleinste Zahl, welche die Bedingung erfüllt.

(c) Der bessere Weg als das Suchen durch Probieren ist natürlich die Definition und die Anzeige einer Wertetabelle, aus der man dann das gesuchte n = 19 ablesen kann.
Auch hier hängt die Definition der Funktion davon ab, wie der Rechnen binomialCdf berechnet.

1. Variante: Der Rechner kann $P(uGr \le X \le oGr)$ direkt verarbeiten:
Dann wird man die Funktion g definieren um $P(X \ge 9) \ge 0{,}96$ zu lösen:
$x \ge 19$, also n = 19 (rechter Screenshot).

2. Variante: Der Rechner kann nur $P(0 \le X \le k)$ berechnen. Dann muss man umrechnen auf das Gegenereignis $1 - P(X \le 8) \ge 0{,}96$ und löst die Ungleichung $P(X \le 8) \le 0{,}04$:
$x \ge 19$, also n = 19 (linker Screenshot).

Define $f(x)=\text{binomCdf}\left(x,\frac{2}{3},0,8\right)$

x	f(x):= binomCdf(x,2/3,0,8)
13.	0.447961
14.	0.310192
15.	0.203039
16.	0.126501
17.	0.075475
18.	0.043348
19.	0.024072
20.	0.012973

Define $g(x)=\text{binomCdf}\left(x,\frac{2}{3},9,x\right)$

x	g(x):= binomCdf(x,2/3,9,x)
13.	0.552039
14.	0.689808
15.	0.796961
16.	0.873499
17.	0.924525
18.	0.956652
19.	0.975928
20.	0.987027

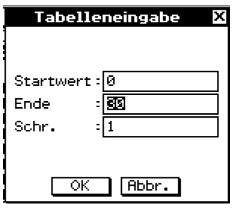
Hinweis: Die Funktionstabellen erstellt man mit dem Menü „Lists & Spreadsheet“, Untermenü „Wertetabelle“

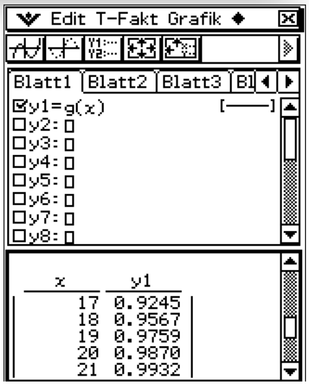
(2) **CASIO ClassPad** gestattet natürlich genauso die Berechnung der Werte, und auch auf beide Arten (d. h. mit variabler unterer Grenze bzw. bei älteren Softwareversionen nur mit 0 als unterer Grenze.)

Die Eingabesyntax sieht hier so aus:
binomialCDf(uG,oG,n,p)

```
define g(x)=binomialCDf(9,x,x,2/3)
                              done
g(18)
                      0.9566519338
g(19)
                      0.9759282298
```

Eine Wertetabelle erstellt man über das Menü „Grafik und Tabelle“

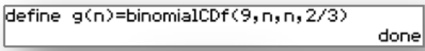




Anstelle einer Funktionentabelle kann man auch eine Zahlenfolge erstellen und anzeigen lassen
Das Vorgehen dazu wird auf der nächsten Seite gezeigt.

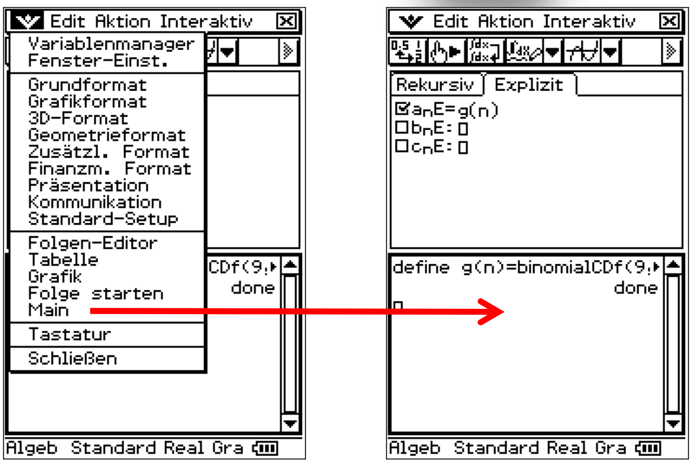
Lösung der Aufgabe durch eine Zahlenfolge mit CASIO ClassPad

Zunächst definiert man den Folgenterm im Hauptmenü

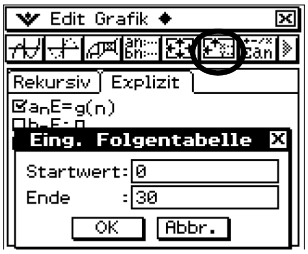


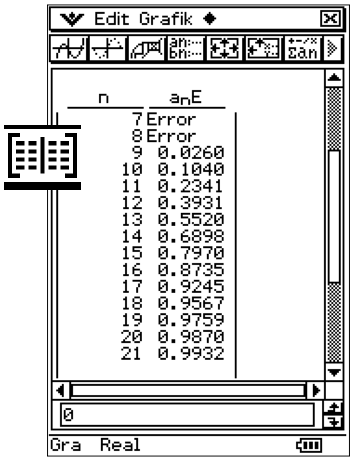
Dann wechselt man zum Folgenmenü:

Wir wollen eine explizite Folge eingeben, und verwenden dazu die bereits definierte Funktion g.
Hat man diese noch nicht definiert, kann man über das Grundmenü oben links durch Anklicken auf „Main“ das Hauptmenü einblenden lassen.



Bevor wir nun die Wertetabelle anschauen, müssen wir ihren Definitionsbereich einstellen.
Dann zeigt ein Klick auf das Listensymbol die Wertetafel der Folge an. Die Werte für $x \le 8$ existieren natürlich nicht.





Hinweis:
Weitere Erklärungen zu den Rechnern findet man im Text 34011 Binomialverteilung 1.

Fortsetzung der Lösung

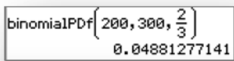
b) Mit wie vielen Stadtkindern kann man unter 300 Jugendlichen rechnen?

Erwartungswert der Binomialverteilung: $E(X) = n \cdot p = 300 \cdot \frac{2}{3} = 200$

Man kann mit 2ßß Stadtkindern rechnen.

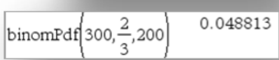
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man diese Anzahl?

CASIO:



$P(X = 200) = \text{binomialPDf}(200,300,\frac{2}{3}) = 0{,}0488$

Nspire:



Berechne die Wahrscheinlichkeit zu diesen Ereignissen (es sei n = 300):

A: Man erhält höchstens 150 Stadtkinder. $P(X \le 150) \approx 0$

B: Man erhält mehr als 200 Stadtkinder. $P(X > 200) \approx 0{,}4783$

C: Man erhält mehr als 100 aber weniger als 120 Stadtkinder. $P(191 \le X \le 209) \approx 0{,}8772$

D: Man erhält mindestens 200 aber höchstens 250 Stadtkinder. $P(200 \le X \le 250) \approx 0{,}5271$

c) Bestimme ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem zu 66% Stadtkinder sind.

Der Erwartungswert ist E = 200.

Ein zu E symmetrisches Intervall hat die Form $200-k \le x \le 200+k$

Ein möglicher Lösungsweg ist der, eine zugehörende Funktion zu definieren und sich die Wertetabelle anzeigen zu lassen:

TI Nspire:

Define $p(x)=\text{binomCdf}\left(300,\frac{2}{3},200-x,200+x\right)$ *Fertig*

x	p(x):= binomCdf(300,2/3,200−x,200..
0	0.048813
1.	0.145712
2.	0.240465
3.	0.331746
4.	0.418377
5.	0.499374
6.	0.57398
7.	0.641676
8.	0.702188
9.	0.755473
10.	0.801693
11.	0.841185

CASIO ClassPad:

define $p(x)=\text{binomialCDf}\left(200-x,200+x,300,\frac{2}{3}\right)$

binomialCDf
Unterer 200−x
Oberer 200+x
Umfang n 300
pos 2/3
Erfolgswahrscheinlichkeit (0≤p≤1)
OK Abbr.

Edit T-Fakt Grafik

x	y1
3	0.3317
4	0.4184
5	0.4994
6	0.5740
7	0.6417
8	0.7022
9	0.7555

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Bl
y1=p(x)
y2:

Beide Tabellen zeigt, dass für x = 7 die Wahrscheinlichkeit etwa 64% beträgt.

Ergebnis: Im Intervall $193 \le X \le 207$ liegen 64% der Stadtkinder.

d) Bestimme k so, dass gilt: $P(X \le k) = 0{,}82$. Beschreibe dieses Ereignis mit Worten.

Hier beginne ich mit **CASIO**.
Er besitzt eine Umkehrfunktion zur binomialen CD-Funktion.

Bei einem Rechner, der diese Option nicht besitzt, muss man entweder suchen, oder mit einer selbst definierten Funktion eine Wertetafel erstellen lassen.

invBinomialCDf
prob 0.82
Umfang n 300
pos 2/3
Erfolgswahrscheinlichkeit (0≤p≤1)
OK Abbr.

$\text{invBinomialCDf}\left(0.82,300,\frac{2}{3}\right)$
207

TI Nspire:

Define $p(x)=\text{binomCdf}\left(300,\frac{2}{3},0,x\right)$ *Fertig*

x	p(x):= binomCdf(300,2/3,0,x)
204.	0.70756
205.	0.748502
206.	0.786263
207.	0.820558
208.	0.851226
209.	0.878225
210.	0.901625

In dieser Zeile steht die Ergebniszahl 207.

Ergebnis: $P(X \le 207) \approx 0{,}82$

In Worten: Mit 82% Wahrscheinlichkeit findet man höchstens 207 Stadtkinder,